Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

GEOMETRIA SIMPLÉCTICA - 2º Semestre 2020/21

1ª **Ficha de Exercícios**

Data de entrega: 19 de Março

1. Seja (V, ω) um espaço vectorial simpléctico. Mostre que qualquer subespaço $S \subset V$ com codimensão 1 é coisotrópico.

2. (a) Seja E um espaço vectorial real. Mostre que $E \oplus E^*$ tem uma estrutura simpléctica canónica ω_0 determinada por $\omega_0(u \oplus \alpha, v \oplus \beta) = \beta(u) - \alpha(v)$.

   (b) Seja L um subespaço Lagrangiano de um espaço vectorial simpléctico (V, ω). Mostre que existe uma transformação linear simpléctica $\psi : (V, \omega) \to (L \oplus L^*, \omega_0)$ tal que $\psi(u) = u \oplus 0\,,\ \forall u \in L$.

3. Seja (V, ω) um espaço vectorial simpléctico, $J \in \mathcal{J}(V, \omega)$ uma estrutura complexa compativel com ω e $g_J(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ o produto interno associado. Mostre que um subespaço $L \subset V$ é Lagrangiano sse $J(L) = L^\perp \equiv$ complemento ortogonal de L com respeito a g_J. Deduza que L é Lagrangiano sse $J(L)$ é Lagrangiano.

4. Seja V um espaço vectorial real de dimensão $2n$ e $J : V \to V$ uma estrutura complexa. Mostre que o espaço das formas simplécticas em V compativeis com J é convexo.

5. Considere a variedade simpléctica (S^2, ω), onde
$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$
e $\omega \in \Omega^2(S^2)$ é dada por
$$\omega_x(u, v) = \langle x, u \times v \rangle\,,\ \forall x \in S^2\,,\ \forall u, v \in T_x S^2 = \{x\}^\perp \subset \mathbb{R}^3$$
($\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ e $\times$ denota o produto externo). Ou seja, ω é a forma de área induzida em S^2 pela métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^3$.

   (a) Mostre que em $S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$, a forma simpléctica ω é dada em coordenadas polares cilíndricas (θ, x_3), com $0 \leq \theta < 2\pi$ e $-1 < x_3 < 1$, por $\omega = d\theta \wedge dx_3$.
   Nota: isto mostra que a projecção horizontal do cilindro na esfera preserva área, um facto bem conhecido desde Arquimedes.

   (b) Use a alínea anterior para mostrar que o fluxo Hamiltoniano gerado pela função $h : S^2 \to \mathbb{R}$, $h(x) = x_3$, consiste em rotações de S^2 em torno do seu eixo vertical.

6. (a) Seja L uma variedade diferenciável. Qualquer difeomorfismo $f : L \to L$ induz naturalmente um difeomorfismo $F : T^*L \to T^*L$ pela fórmula
$$F(x, \alpha) = (f(x), ((df)_x^{-1})^* \alpha)\ .$$
   Mostre que F é um simplectomorfismo de T^*L, i.e. $F^* \omega_{\text{can}} = \omega_{\text{can}}$.

   (b) Seja Y um campo vectorial em L, $f_t : L \to L$ o fluxo gerado por Y, $F_t : T^*L \to T^*L$ o grupo a 1-parâmetro de simplectomorfismos induzido por f_t, e X o campo vectorial em T^*L gerador de F_t. Mostre que $X = X_h$ é o campo vectorial Hamiltoniano da função $h : T^*L \to \mathbb{R}$ dada por $h(x, \alpha) = \alpha_x(Y(x))$.