Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

GEOMETRIA DIFERENCIAL - $1^{\underline{o}}$ **Semestre 2025/26**

$4^{\underline{a}}$ **Ficha de Exercícios** - Conexões e Variedades Riemannianas

Data de entrega: 27 de Novembro

1. Sejam E^1 e E^2 dois fibrados vectoriais sobre uma variedade M, com conexões ∇^1 e ∇^2 respectivamente. Seja ∇ a conexão naturalmente definida no vibrado associado $E^1 \otimes E^2$ pela fórmula:
$$\nabla(s^1 \otimes s^2) = (\nabla^1 s^1) \otimes s^2 + s^1 \otimes (\nabla^2 s^2)\,,\ s^1 \in \Gamma(E^1)\,,\ s^2 \in \Gamma(E^2)\,.$$
Dados $X, Y \in \Gamma(TM)$, mostre que a curvatura Ω da conexão ∇ satisfaz:
$$\Omega(X,Y)(s^1 \otimes s^2) = (\Omega^1(X,Y)s^1) \otimes s^2 + s^1 \otimes (\Omega^2(X,Y)s^2)\,,$$
onde Ω^1 e Ω^2 denotam a curvatura de ∇^1 e ∇^2 respectivamente.

2. Seja $E = TM$ o fibrado tangente de uma variedade M, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base local para secções de TM sobre um aberto $U \subset M$ e $\{\theta^1, \ldots, \theta^m\}$ a base dual para 1-formas definidas em U (i.e. $\theta^i(e_j) = \delta^i_j$). Seja ainda ∇ uma conexão em $E = TM$, definida em U por uma matriz de conexão $\omega = [\omega^i_j]$ (i.e. $\nabla e_j = \sum_i \omega^i_j e_i\,,\ \omega^i_j \in \Omega^1(U)$).
   (a) Seja Θ o vector coluna de 2-formas definido por $\Theta = d\theta + \omega \wedge \theta$, com $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^m)^t$. Determine qual a fórmula de mudança de base para Θ e conclua que Θ está bem definida em toda a variedade M como um elemento de $\Omega^2(TM) \equiv$ 2-formas com valores em TM.
   (b) Mostre que para $X, Y \in \Gamma(TM)$ tem-se que
$$\sum_{i=1}^{m} \Theta^i(X,Y)e_i = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = T(X,Y)\,,$$
i.e. Θ é o tensor de torsão de ∇.
   (c) Assuma agora que ∇ é uma conexão sem torsão em TM, e seja $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ a matriz de curvatura. Mostre que $\Omega \wedge \theta \equiv 0$, e que esta equação não é mais do que a Primeira Identidade de Bianchi:
$$\Omega(X,Y)Z + \Omega(Y,Z)X + \Omega(Z,X)Y = 0\,,\ \forall\, X, Y, Z \in \Gamma(TM)\,.$$

3. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão m. Dadas coordenadas locais $x = (x^1, \ldots, x^m)$ num aberto U_x de M, considere a forma de grau m, $\sigma_x \in \Omega^m(U_x)$, definida por
$$\sigma_x = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m\,,$$
onde $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$.

(a) Se $y = (y^1, \ldots, y^m)$ é um sistema de coordenadas locais num aberto U_y de M, mostre que em $U_x \cap U_y$ tem-se:

$$\sigma_x = \pm \sigma_y \,,$$

onde o sinal é determinado pelo Jacobiano da mudança de coordenadas $x = x(y)$ (ou $y = y(x)$).

(b) Conclua que se M é orientável então (M, g) possui uma m-forma diferencial canónica $\sigma \in \Omega^m(M)$, satisfazendo

$$\sigma_p(v_1, \ldots v_m) = 1$$

para qualquer $p \in M$ e base ortonormada $\{v_1, \ldots, v_m\}$ para $T_p(M)$ compatível com a orientação. (σ é a chamada <u>forma de volume</u> da variedade Riemanniana (M, g).)

4. Seja $(M, g = \langle\rangle)$ uma variedade Riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita em TM.

   (a) Dada uma curva $\gamma : [0,1] \to M$ e campos vectoriais $X, Y \in \Gamma(TM|_\gamma)$ definidos ao longo de γ, mostre que

   $$\frac{d}{dt}\langle X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)}\rangle = \langle (\nabla_{\dot\gamma} X)_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)}\rangle + \langle X_{\gamma(t)}, (\nabla_{\dot\gamma} Y)_{\gamma(t)}\rangle \,.$$

   (b) Conclua que o transporte paralelo

   $$\Pi_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(1)}M$$

   é uma isometria.

5. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função C^∞. Define-se o campo vectorial <u>gradiente de f</u>, $grad f \in \Gamma(TM)$, pela fórmula

   $$g(grad f, Y) = df(Y) \,, \ \forall \ Y \in \Gamma(TM) \,.$$

   Mostre que se $\|grad f\| \equiv 1$ então as curvas integrais de $grad f$ são geodésicas.