Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

GEOMETRIA DIFERENCIAL - $1^{\underline{o}}$ Semestre 2025/26

$3^{\underline{a}}$ **Ficha de Exercícios** - Tensores e Conexões

Data de entrega: 13 de Novembro

1. Seja V um espaço vectorial real e $\Lambda(V^*) = \oplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V^*)$ a sua álgebra exterior, onde $n = \dim V$. Um elemento $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ diz-se <u>decomponível</u> se pode ser escrito na forma $\omega = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k$ com $\alpha^i \in \Lambda^1(V^*) \equiv V^*$, $i = 1, \ldots, k$.

   (a) Mostre que se $n \leq 3$, qualquer $\omega \in \Lambda^k(V^*)$, $k = 1, 2$ ou 3, é decomponível.

   (b) Se $n > 3$, dê exemplos de tensores não decomponíveis $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ para algum $k > 0$.

   Seja agora $T : V \to V$ uma transformação linear. Para cada $1 \leq k \leq n$, T induz naturalmente transformações lineares $T_k^* : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$ definidas por

   $$T_k^*(\omega)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(Tv_1, \ldots, Tv_k)\,,\ \omega \in \Lambda^k(V^*)\,,\ v_1, \ldots, v_k \in V\,.$$

   (c) Mostre que para qualquer $\omega \in \Lambda^n(V^*)$, onde $n = \dim V$, tem-se que

   $$T_n^*(\omega) = \det(T)\,\omega\,.$$

   (Observe que se pode desta forma definir de forma completamente invariante, i.e. independente de bases, o determinante de uma transformação linear.)

   (d) Conclua que escolher uma orientação para V (ou V^*) é equivalente a escolher uma das componentes de $\Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}$. (Recorde-se que $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$.)

2. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Mostre que M é orientável sse existe uma n-forma diferencial, $\omega \in \Omega^n(M)$, diferente de zero em todos os pontos de M.

3. Dado um campo vectorial $X \in T_{1,0}(M) = \Gamma(TM)$, definimos a derivada de Lie

   $$\mathcal{L}_X : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M) \quad \text{por} \quad \mathcal{L}_X(\alpha) = \frac{d}{dt}(X_t^*\alpha)|_{t=0}\,,\ \text{onde } X_t \equiv \text{fluxo de } X.$$

   Mostre que:

   (a) $\mathcal{L}_X$ é uma derivação, i.e. para todo $\alpha, \beta \in \Omega^*(M)$ tem-se:

   $$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta)\,;$$

   (b) $\mathcal{L}_X$ comuta com contracções, i.e. para todo o $v \in \Gamma(TM)$ e $\alpha \in \Omega^*(M)$ tem-se

   $$\mathcal{L}_X(\iota(v)\alpha) = \iota(\mathcal{L}_X v)\alpha + \iota(v)\mathcal{L}_X(\alpha)\,;$$

   (c) para todos os campos vectoriais $X, Y \in \Gamma(TM)$ tem-se

   $$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X,Y]}\,.$$

- Estruturas complexas em espaços vectoriais

  Seja V um espaço vectorial real. Uma estrutura complexa em V é uma transformação linear $J : V \to V$ tal que $J^2 = -I$ (onde $I \equiv$ transformação identidade). Quando um tal J existe temos que $\dim V = 2n$ é par, e existe uma base para V da forma $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ tal que $J(e_i) = f_i$ e $J(f_i) = -e_i$, $i = 1, \dots, n$. Isto significa que nesta base J é representada pela matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -I & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

  onde cada um dos blocos tem dimensão $n \times n$. Designaremos qualquer base com esta propriedade por base complexa para V (já que dá origem a uma identificação de V com $\mathbb{C}^n$).

  Uma estrutura complexa $J : V \to V$, $J^2 = -I$, dá também origem a uma decomposição da complexificação de V, $V_{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C} = V \oplus iV$, na forma

$$V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \quad \text{com} \quad V^{1,0} = \{X - iJX \,:\, X \in V\} \quad \text{e} \quad V^{0,1} = \{X + iJX \,:\, X \in V\}$$

  são os espaços próprios da extensão de J a $V_{\mathbb{C}}$ associados aos valores próprios $+i$ e $-i$ respectivamente.

4. Uma variedade M de dimensão $2n$ diz-se uma variedade quase-complexa se existe um endomorfismo $J : TM \to TM$ com $J^2 = -I$ (i.e. qualquer que seja $p \in M$, $J_p : T_p(M) \to T_p(M)$ é uma transformação linear com $J_p^2 = -I_p$). Um par (M, J) da forma anterior diz-se uma variedade complexa se para qualquer ponto $p \in M$ existem coordenadas $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$, definidas numa vizinhança U de p, tais que os vectores
$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}$$
   formam uma base complexa para o espaço tangente em qualquer ponto de U.

   (a) Mostre que qualquer variedade quase-complexa (M, J) é orientável.

   (b) Seja $N : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ a aplicação bilinear definida por
$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] \,.$$
   Mostre que N é na realidade um campo tensorial de tipo $(1, 2)$.

   (c) Estendendo o parêntesis de Lie à complexificação $T_{\mathbb{C}}M = TM \oplus iTM$ por linearidade (i.e. $[X + iY, Z] = [X, Z] + i[Y, Z]$), mostre que a distribuição $T^{1,0}M \subset T_{\mathbb{C}}M$ é involutiva se e só se $N \equiv 0$.

(d) Mostre que se (M, J) é uma variedade complexa então $N \equiv 0$.

Nota: o tensor N é normalmente designado por tensor de Nijenhuis da variedade quase-complexa. O converso do resultado da alínea (d) também é verdade mas muito mais difícil de demonstrar: consiste no chamado Teorema de Newlander-Nirenberg.

5. (Existência de Conexões.) Seja E um vibrado vectorial sobre uma variedade M. Seja $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma cobertura de M por abertos, localmente finita e com cada $\overline{U_i}$ compacto. Seja ainda $\{\varphi_i\}$ uma partição de unidade subordinada a $\{U_i\}$, i.e.

$$\varphi_i \in C^{\infty}(M)\,,\ \text{suporte}\,(\varphi_i) \subset U_i\,,\ 0 \leq \varphi_i \leq 1\ \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(p) = 1\,,\ \forall\, p \in M\,.$$

Finalmente, seja ∇^i uma conexão para $E|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^n$.

Defina ∇ por

$$(\nabla_X\, s)(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(p)(\nabla^i_X\, s)(p)\,,$$

onde $X \in \Gamma(TM)$, $s \in \Gamma(E)$. Mostre que ∇ é uma conexão em E. Conclua que qualquer vibrado vectorial sobre uma variedade diferencial (paracompacta) tem conexões.

6. Mostre que se ∇ é uma conexão no vibrado vectorial E sobre M e $\delta \in \Gamma(T^*M \otimes E \otimes E^*)$ (1-forma em M com valores em $E \otimes E^* \cong End(E)$), então $\nabla + \delta$ define uma nova conexão em E. Reciprocamente, mostre que se $\overline{\nabla}$ é uma conexão qualquer em E então $\delta := \overline{\nabla} - \nabla \in \Gamma(T^*M \otimes E \otimes E^*)$ (δ é designado por tensor diferença).