

RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC e LEFT

1º Sem. 2025/26

04/Fev/2026 - v.2

Duração: 120mn

Número:

Nome:

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 3| \geq |2x - 1|\}$.

$$|2x+3| \geq |2x-1| \Leftrightarrow (2x+3 \geq |2x-1| \vee 2x+3 \leq -|2x-1|)$$

$$\Leftrightarrow |2x-1| \leq 2x+3 \vee |2x-1| \leq -2x-3$$

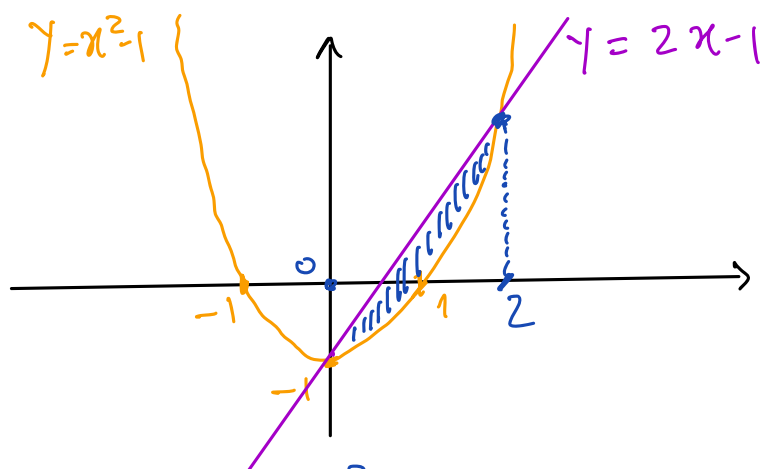
$$\Leftrightarrow (2x-1 \leq 2x+3 \wedge 2x-1 \geq -2x-3) \vee (2x-1 \leq -2x-3 \wedge 2x-1 \geq 2x+3)$$

$$\Leftrightarrow (\underbrace{-1 \leq 3}_{\mathbb{R}} \wedge 4x \geq -2) \vee (\underbrace{4x \leq -2 \wedge -1 \geq 3}_{\emptyset})$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1/2 \Leftrightarrow x \in [-1/2, +\infty[//$$

2. (1,0 val.) Esboce e determine a área da seguinte região do plano:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 2x - 1\}.$$



$$x^2 - 1 = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=0} \vee \underline{x=2}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}(D) &= \int_{-1}^2 [(2x-1) - (x^2-1)] = \int_{-1}^2 (2x - x^2) = \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} // \end{aligned}$$

3. (1,5 val.) Use indução para mostrar que $\log((n+1)!) > n \log 3 - \log 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

[P(1)] $\log(2) > \log(3) - \log(2) = \log\left(\frac{3}{2}\right).$ ✓

[P(n) $\Rightarrow$ P(n+1)]

Hip.: $\log((n+1)!) > n \log 3 - \log 2$, para um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo

A provar: $\log((n+2)!) > (n+1) \log 3 - \log 2$, para o mesmo det. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Dem.: $\log((n+2)!) = \log((n+2) \cdot (n+1)!) =$
 $= \log(n+2) + \log((n+1)!) > \log(n+2) + n \log 3 - \log(2) \geq$
 $\geq \log(3) + n \log 3 - \log(2) = (n+1) \log(3) - \log(2).$

pq $n+2 > 3$,
 $\forall n \geq 1$

c.q.d.

4. (1,0 val.) A tabela seguinte indica alguns dos valores de uma função injetiva e diferenciável $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e da sua derivada $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da inversa f^{-1} no ponto de abscissa 3.

x	-1	0	1
$f(x)$	-3	1	3
$f'(x)$	2	1	3

$f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1$

$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} =$
 $= \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$

$(y - f^{-1}(3)) = (f^{-1})'(3)(x - 3)$

$\Rightarrow \boxed{y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3)}$

5. (1,0 val.) Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}, & x > 1, \\ x^2 + ax - b, & x \leq 1, \end{cases}$$

onde a, b são constantes reais. Determine a, b de forma a que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} = e^{-\infty} = 0 = f(1) = 1 + a - b$
 $\Rightarrow \boxed{b - a = 1}$

• $f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}}{x-1} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{\gamma^2}}}{\gamma} = \frac{0}{0} =$

R.C. $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{\gamma^3}}{e^{-\frac{1}{\gamma^2}}(-\frac{2}{\gamma^3})} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \frac{\gamma}{e^{-\frac{1}{\gamma^2}}} = \frac{0}{+\infty} = 0$

• $f'_e(1) = (2x + a)|_{x=1} = 2 + a \longrightarrow 2 + a = 0$
 $\Rightarrow \boxed{a = -2} \wedge \boxed{b = -1}$

6. (1,0 val.) A tabela seguinte representa alguns valores de uma função g de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e da sua derivada g' . Mostre que g' tem um zero no intervalo $[-1, 1]$.

x	-1	0	1
$g(x)$	3	2	4
$g'(x)$	-1	-2	-1

• $\frac{g(0) - g(-1)}{0 - (-1)} = \frac{2 - 3}{1} = -1 < 0 \xRightarrow[\text{Lag.}]{\text{Teor.}} \exists c_1 \in]-1, 0[: g'(c_1) < 0$

• $\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \frac{4 - 2}{1} = 2 > 0 \xRightarrow[\text{Lag.}]{\text{Teor.}} \exists c_2 \in]0, 1[: g'(c_2) > 0$

• g' continua $\xRightarrow{\text{TVI}} \exists c \in]c_1, c_2[\subset]-1, 1[: g'(c) = 0$

7. (1,5 val.) Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = (x^2 + 1)^{\sin(x)}$

(b) $g(x) = \tan(\arccos(x) + 1)$.

$$(a) \quad f'(x) = \left(e^{\sin(x) \cdot \log(x^2+1)} \right)' = e^{\sin(x) \cdot \log(x^2+1)} \cdot (\sin(x) \cdot \log(x^2+1))'$$

$$= (x^2+1)^{\sin(x)} \left[\cos(x) \log(x^2+1) + \sin(x) \cdot \frac{2x}{x^2+1} \right] //$$

$$(b) \quad g'(x) = \frac{(\arccos(x) + 1)'}{\cos^2(\arccos(x) + 1)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos^2(\arccos(x) + 1)} //$$

8. (1,0 val.) Calcule: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{x+2} = (\cosh(0))^{+\infty} = 1^{+\infty} = \text{indet.} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x+2) \log(\cosh(1/x))} = e^0 = 1 //$$

C.A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\cosh(1/x))}{\frac{1}{x+2}} = \frac{0}{0} =$

R.C. $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sinh(1/x) \cdot (-1/x^2)}{\cosh(1/x)}}{\frac{1}{(x+2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh(1/x)}{\cosh(1/x)} \cdot \left(\frac{x+2}{x}\right)^2 = 0 \times 1 = 0 //$

9. (3,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\frac{1}{\arcsin(3x)\sqrt{1-9x^2}}$ (b) $x^2(\sin(x)-\cos(x))$ (c) $\frac{1}{\sqrt{t(2-t)}}$ (sugestão: $t = 1 - x^2$)

$$(a) \int \frac{1}{\arcsin(3x) \cdot \sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{\frac{1}{3} \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}}{\arcsin(3x)} =$$

$$= \frac{1}{3} \log |\arcsin(3x)|$$

$$(b) \int \underbrace{x^2}_u \underbrace{(\sin(x) - \cos(x))}_v = \underbrace{x^2}_u \underbrace{(-\cos(x) - \sin(x))}_v -$$

$$- \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{(-\cos(x) - \sin(x))}_v = -x^2 (\cos(x) + \sin(x)) -$$

$$- 2 \left[x (-\sin(x) + \cos(x)) - \int (-\sin(x) + \cos(x)) \right] =$$

$$= -x^2 (\cos(x) + \sin(x)) - 2x (-\sin(x) + \cos(x)) +$$

$$+ 2 (\cos(x) + \sin(x)) //$$

$$(c) \int \frac{1}{\sqrt{t(2-t)}} dt = \int \frac{-2x}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} dx =$$

$$t = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow dt = -2x dx$$

$$= \int \frac{-2x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} =$$

$$= -\arcsin(x^2) = -\arcsin(1-t) //$$

10. (2,0 val.) Classifique como convergente ou divergente cada uma das seguintes séries:

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n} + n}{n^3 + \sin^2(n)} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! + 1}{(n!)^2 + \sqrt{n^3}}$$

mesma natureza

porque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} + n}{n^3 + \sin^2(n)} \stackrel{1/n^2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 n^{1/2} + n^3}{n^3 + \sin^2(n)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{5/2} + n^3}{1 + \frac{\sin^2(n)}{n^3}} = 1 \quad \text{e} \quad 0 < 1 < +\infty$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (Dirichlet com

expoente $p=2>1$), concluímos que a série dada também é convergente.

• Aplicando o Critério da Razão a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! + 1}{(n!)^2 + \sqrt{n^3}}$ obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+2)! + 1}{((n+1)!)^2 + \sqrt{(n+1)^3}}}{\frac{(2n)! + 1}{(n!)^2 + \sqrt{n^3}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)! \left(1 + \frac{1}{(2n+2)!}\right)}{(2n)! \left(1 + \frac{1}{(2n)!}\right)} \cdot \frac{(n!)^2 \left(1 + \frac{\sqrt{n^3}}{(n!)^2}\right)}{((n+1)!)^2 \left(1 + \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{((n+1)!)^2}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = 4 > 1 \Rightarrow \text{a série dada é } \underline{\text{divergente}}. \end{aligned}$$

11. (a) (1,5 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n 3^n} (1-x)^n.$$

• Raio de Convergência: $R = \lim \frac{\frac{4^n}{n 3^n}}{\frac{4^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}}} = \frac{3}{4} //$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{série abs. conv.} & \text{q.d. } |1-x| < \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[\\ \text{série div.} & \text{q.d. } |1-x| > \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{1}{4}[\cup]\frac{7}{4}, +\infty[\end{cases}$$

• Extremos

$\boxed{x = \frac{1}{4}}$ $\leadsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n 3^n} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergente
(série harmônica, Dirichlet c/ $p=1 \leq 1$)

$\boxed{x = \frac{7}{4}}$ $\leadsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n 3^n} \left(1 - \frac{7}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \text{série}$

harmônica alternada, convergente pelo Crit. Leibniz.

Não é abs. conv. pq $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergente.

Logo a série é simplesm/conv. q.d. $x = \frac{7}{4}$.

- (b) (1,0 val.) Denotando por g a função definida por esta série de potências, calcule $g'(\frac{3}{4})$.

$$g'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n 3^n} (1-x)^n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n 3^n} \cdot \cancel{n} (1-x)^{n-1} (-1) =$$

$$= - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n (1-x)^{n-1} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^{n+1} (1-x)^n =$$

$$= - \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4(1-x)}{3} \right)^n \Rightarrow g'\left(\frac{3}{4}\right) = - \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4 \times \frac{1}{4}}{3} \right)^n =$$

$$= - \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = - \frac{4}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = -2 //$$

12. (1,0 val.) Desenvolva a função $\int_0^{x^2} e^{3t^2+2} dt$ em série de potências de x . Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

$$\left(\int_0^{x^2} e^{3t^2+2} dt \right)' = e^{3x^4} \cdot e^2 \cdot 2x =$$

$$= 2e^2 x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x^4)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^2 3^{n+1} x^{4n+1}}{n!}, \quad \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{x^2} e^{3t^2+2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^2 3^{n+1} x^{4n+2}}{n!(4n+2)} + k$$

$$x=0 \Rightarrow 0 = 0 + k \Rightarrow k=0$$

$$\Rightarrow \int_0^{x^2} e^{3t^2+2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^2 3^{n+1} x^{4n+2}}{n!(4n+2)}, \quad \underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$$

13. (1,0 val.) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$, não-vazios e majorados com $\sup B = 0$. Considere o conjunto $A+B \stackrel{\text{def}}{=} \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Mostre que $A+B$ tem supremo e que se tem $\sup(A+B) = \sup A$.

- $\sup B = 0 \Rightarrow b \leq \sup B = 0, \quad \forall b \in B \Rightarrow$
 $\Rightarrow a+b \leq a \leq \sup A, \quad \forall a \in A, b \in B \Rightarrow \sup A \text{ é maj. de } A+B.$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A, b \in B \text{ t.q. } \sup A - \varepsilon/2 < a \leq \sup A \text{ e}$
 $-\varepsilon/2 < b \leq 0 \Rightarrow \sup A - \varepsilon < a+b \leq \sup A$
 $\Rightarrow \sup A = \sup(A+B) //$

14. (1,5 val.) Sejam $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$. Prove a chamada *fórmula integral para o resto de Taylor* de ordem n de f em torno do ponto a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n,a}(x) \quad \text{com} \quad R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Sugestão: Use indução em n e um método de integração apropriado.

P(0) $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = f(a) + f(x) - f(a) = f(x).$ ✓

P(n) $\Rightarrow$ P(n+1)

Hip. : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$

para um determinado $n \in \mathbb{N}_0$ fixo.

A provar : $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt,$

para o mesmo determinado $n \in \mathbb{N}_0$.

Dem. : Começando pela hipótese e integrando por partes:

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{\text{hip.}}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{u'} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_v dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \left[-\underbrace{\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}}_u \cdot \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_v \right]_a^x - \int_a^x \underbrace{-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}}_u \cdot \underbrace{f^{(n+2)}(t)}_{v'} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \left[-0 + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) \right] + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \quad \parallel \end{aligned}$$

C.q.d.

RASCUNHO