Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC E LEFT

1º Sem. 2025/26 05/Dez/2025 - LMAC e LEFT - v.2 Duração: 45mn

Número: **Nome:**

1) (2.0 val.) Determine se a função $f :]-\infty, 1/2[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arccos(2x) & , \ 0 \leq x < 1/2\,, \\ \frac{2\arctan(x^2)}{x} & , \ x < 0\,, \end{cases}$$

é diferenciável na origem. Se for, calcule $f'(0)$.

- $f(0) = \frac{\pi}{2} - \arccos(0) = \pi/2 - \pi/2 = 0$
- f é contínua à direita em zero pelo que

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \times 2 = 2 /\!/$$

- $$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\arctan(x^2)}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{R.C.}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{2\,\frac{\cancel{2x}}{1+x^2}}{\cancel{2x}} = 2 /\!/$$

- Logo f é diferenciável na origem e $f'(0) = 2$.

2) (2.0 val.) A tabela seguinte representa alguns valores de uma função diferenciável :

x	-2	0	3
$f(x)$	3	5	8

Mostre que f' não é injetiva.

- Aplicando o T. Lagrange aos intervalos $[-2,0]$ e $[0,3]$, temos que:

(i) $\exists\, c_1 \in]-2,0[\ : \ f'(c_1) = \frac{f(0) - f(-2)}{0-(-2)} = \frac{5-3}{2} = 1$

(ii) $\exists\, c_2 \in [0,3] \ : \ f'(c_2) = \frac{f(3) - f(0)}{3-0} = \frac{8-5}{3} = 1$.

- Logo existem $c_1 \neq c_2$ com $f'(c_1) = f'(c_2)$, pelo que f' não é injectiva.

3) (2.0 val.) Calcule: $\lim_{x\to 0} (1-\sinh(x))^{\frac{1}{3^x-1}}$. $= 1^\infty = \lim_{x\to 0} e^{\log\left[(1-\sinh(x))^{\frac{1}{3^x-1}}\right]} =$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\log(1-\sinh(x))}{3^x-1}\right]} = e^{-1/\log(3)} //$$

$\boxed{C.A.}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-\sinh(x))}{3^x-1} = \frac{0}{0} =$

$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\cosh(x)}{1-\sinh(x)}}{\log(3)\times 3^x} = -\frac{1}{\log(3)}$

4) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função 6 vezes diferenciável e tal que o seu polinómio de Taylor de ordem 6 no ponto $a=2$ é dado por $p_{6,2}(x) = \pi - 3(x-2)^4 + 7(x-2)^6$.

(a) **(1.5 val.)** Decida se f tem ou não um extremo local em 2, classificando-o em caso afirmativo.

$f(2)=\pi$, $f'(2) = f''(2) = f^{(3)}(2) = 0$ e

$\left.\begin{array}{l} f^{(4)}(2) < 0 \\ \text{ordem } \underline{\text{par}} \end{array}\right\} \overset{(\cap)}{\Longrightarrow}$ f tem <u>máximo local</u> em 2.

(b) **(1.5 val.)** Calcule: $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-\pi}{(x-2)^4}$.

$\boxed{\text{Res. 1}}$ Pelo T. Taylor temos que $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - p_{4,2}(x)}{(x-2)^4} = 0$.

Logo $0 = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - (\pi - 3(x-2)^4)}{(x-2)^4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-\pi}{(x-2)^4} = \lim_{x\to 2} \frac{-3(x-2)^4}{(x-2)^4} = -3 //$

$\boxed{\text{Res. 2}}$ $f, f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}$ contínuas e $f(2)=\pi$,

$f^{(1)}(2) = f^{(2)}(2) = f^{(3)}(2) = 0$, $f^{(4)}(2) = -3\times 4!$

$\Rightarrow$ podemos aplicar sucessivamente a Regra de Cauchy para obter

$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-\pi}{(x-2)^4} = \cdots = \lim_{x\to 2} \frac{f^{(4)}(x)}{4!} = \frac{-3\times 4!}{4!} = -3 //$

5) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $(3x^2+1)\log(x^2+1)$.

$$\int \underbrace{(3x^2+1)}_{u'} \underbrace{\log(x^2+1)}_{v} = \underbrace{(x^3+x)}_{u} \underbrace{\log(x^2+1)}_{v} - \int \underbrace{(x^3+x)}_{u} \underbrace{\frac{2x}{(x^2+1)}}_{v'}$$

$$= x(x^2+1)\log(x^2+1) - \int 2x^2 = x(x^2+1)\log(1+x^2) - \frac{2}{3}x^3$$

6) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $\int \arctan(\cos(3x))\dfrac{\sin(3x)}{1+\cos^2(3x)}$. $=$

$$= -\frac{1}{3}\int \underbrace{\arctan(\cos(3x))}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{-3\sin(3x)}{1+\cos^2(3x)}}_{u'(x)} = -\frac{1}{3}\frac{(u(x))^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\arctan^2(\cos(3x))}{2} = -\frac{1}{6}\arctan^2(\cos(3x))$$

7) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $\dfrac{1}{(x^2-4)(x+2)}$. $= \dfrac{1}{(x-2)(x+2)^2} =$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2) + C(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2) + C(x-2) = 1$$

$\boxed{x=-2} \Rightarrow -4C = 1 \Rightarrow \boxed{C = -1/4}$ | $\boxed{x^2} \Rightarrow A+B=0$

$\boxed{x=2} \Rightarrow 16A = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1/16}$ | $\Rightarrow \boxed{B = -1/16}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x^2-4)(x+2)} = \frac{1}{16}\int\frac{1}{x-2} - \frac{1}{16}\int\frac{1}{x+2} - \frac{1}{4}\int\frac{1}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{16}\log|x-2| - 1/16\log|x+2| + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+2)}$$

8) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $(\tan^2(x)+1)^2$. Sugestão: $t = \tan(x)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \arctan(t)$

$\Rightarrow dx = \dfrac{1}{1+t^2}\, dt$

$$\int (\tan^2(x)+1)^2\, dx =$$

$$= \int (t^2+1)^2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int (1+t^2) =$$

$$= t + \frac{t^3}{3} \underset{t=\tan(x)}{=} \tan(x) + \frac{(\tan(x))^3}{3} \; //$$

9) (3.0 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e sejam $a < b$ tais que $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

- f dif. $\Rightarrow$ f contínua $\Rightarrow$ $f|_{[a,b]}$ tem máx. e mín.

- Se $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$, então

(i) $0 > f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow \exists_{\delta > 0} : f(x) < f(a), \; \forall x \in]a, a+\delta[$

$\Rightarrow f|_{[a,b]}$ não tem mínimo em a.

(ii) $0 < f'_e(b) = \lim_{x \to b^-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \Rightarrow \exists_{\delta > 0} : f(x) < f(b), \; \forall x \in]b-\delta, b[$

$\Rightarrow f|_{[a,b]}$ não tem mínimo em b.

$\Rightarrow$ mínimo de $f|_{[a,b]}$ ocorre num ponto $c \in]a, b[$

$\Rightarrow f'(c) = 0. \; //$

- Se $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$, temos um raciocínio análogo para o máximo de $f|_{[a,b]}$, que terá que ocorrer num ponto $c \in]a, b[$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(c) = 0. \; //$