Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC E LEFT

1º Sem. 2025/26 05/Dez/2025 - LMAC e LEFT - v.1 Duração: 45mn

Número: **Nome:**

1) (2.0 val.) Determine se a função $f :]-\infty, 1/3[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\arctan(x^2)}{x} & , \ x < 0\,, \\ \frac{\pi}{2} - \arccos(3x) & , \ 0 \le x < 1/3\,, \end{cases}$$

é diferenciável na origem. Se for, calcule $f'(0)$.

- $f(0) = \pi/2 - \arccos(0) = \pi/2 - \pi/2 = 0$
- f é contínua à direita em zero pelo que

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(3x)\right)' =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \times 3 = 3$$

- $$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3\arctan(x^2)}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{3\,\frac{\cancel{2x}}{1+x^4}}{\cancel{2x}} = 3$$

- Logo f é diferenciável na origem e $f'(0) = 3$.

2) (2.0 val.) A tabela seguinte representa alguns valores de uma função diferenciável :

x	-3	0	2
$f(x)$	2	5	7

Mostre que f' não é injetiva.

- Aplicando o T. Lagrange aos intervalos $[-3,0]$ e $[0,2]$, temos que:

(i) $\exists_{c_1 \in]-3,0[} : f'(c_1) = \dfrac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)} = \dfrac{5-2}{3} = 1$

(ii) $\exists_{c_2 \in]0,2[} : f'(c_2) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{7-5}{2} = 1$

- Logo, existem $c_1 \neq c_2$ com $f'(c_1) = f'(c_2)$, pelo que f' não é injectiva.

3) **(2.0 val.)** Calcule: $\lim_{x\to 0}(1-\sinh(x))^{\frac{1}{2^x-1}}$. $= 1^{\infty} =$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\log\left[(1-\sinh(x))^{1/2^x-1}\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sinh(x))}{2^x-1}} = e^{-\frac{1}{\log(2)}}$$

$\boxed{C.A.}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sinh(x))}{2^x-1} = \frac{0}{0} =$

$$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cosh(x)/(1-\sinh(x))}{\log(2)\cdot 2^x} = -\frac{1}{\log(2)}$$

4) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função 6 vezes diferenciável e tal que o seu polinómio de Taylor de ordem 6 no ponto $a=3$ é dado por $p_{6,3}(x)=\pi+2(x-3)^4-7(x-3)^6$.

(a) **(1.5 val.)** Decida se f tem ou não um extremo local em 3, classificando-o em caso afirmativo.

$f(3)=\pi$, $f'(3)=0$, $f^{(2)}(3)=0$, $f^{(3)}(3)=0$ e

$\left.\begin{array}{l} f^{(4)}(3)>0 \\ \text{ordem par}\end{array}\right\} \overset{(U)}{\Longrightarrow} f$ tem <u>mínimo local</u> em 3.

(b) **(1.5 val.)** Calcule: $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-\pi}{(x-3)^4}$.

$\boxed{\text{Res. 1}}$ Pelo T. Taylor temos que $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-p_{4,3}(x)}{(x-3)^4}=0$.

Logo $0=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-(\pi+2(x-3)^4)}{(x-3)^4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-\pi}{(x-3)^4} = \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)^4}{(x-3)^4} = 2$$

$\boxed{\text{Res. 2}}$ $f, f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}$ contínuas e $f(3)=\pi$,

$f^{(1)}(3)=f^{(2)}(3)=f^{(3)}(3)=0$, $f^{(4)}(3)=2\times 4!$

$\Rightarrow$ podemos aplicar sucessivamente a Regra de Cauchy para obter:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-\pi}{(x-4)^4} = \cdots = \lim_{x\to 3}\frac{f^{(4)}(x)}{4!} = \frac{2\times 4!}{4!} = 2$$

5) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $(1+3x^2)\log(1+x^2)$.

$$\int \underbrace{(1+3x^2)}_{u'} \underbrace{\log(1+x^2)}_{v} = \underbrace{(x+x^3)}_{u} \underbrace{\log(1+x^2)}_{v} - \int \underbrace{(x+x^3)}_{u} \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{v'}$$

$$= x(1+x^2)\log(1+x^2) - \int 2x^2 = x(1+x^2)\cdot\log(1+x^2) - \frac{2}{3}x^3$$

6) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $\int \arctan(\cos(2x))\dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2(2x)}$. $=$

$$-\frac{1}{2}\int \underbrace{\arctan(\cos(2x))}_{u(x)} \cdot \underbrace{\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2(2x)}}_{u'(x)} = -\frac{1}{2}\frac{(u(x))^2}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\arctan^2(\cos(2x))}{2} = -\frac{1}{4}\arctan^2(\cos(2x))$$

7) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $\dfrac{1}{(x^2-4)(x-2)}$. $= \dfrac{1}{(x+2)(x-2)^2} =$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x+2)(x-2) + C(x+2)}{(x+2)(x-2)(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow A(x-2)^2 + B(x+2)(x-2) + C(x+2) = 1$$

$\boxed{x=2} \Rightarrow 4C=1 \Rightarrow \boxed{C=1/4}$ | $\boxed{x^2} \Rightarrow A+B=0$

$\boxed{x=-2} \Rightarrow 16A=1 \Rightarrow \boxed{A=1/16}$ | $\Rightarrow \boxed{B=-1/16}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x^2-4)(x-2)} = \frac{1}{16}\int\frac{1}{x+2} - \frac{1}{16}\int\frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\int\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{16}\log|x+2| - \frac{1}{16}\log|x-2| - \frac{1}{4}\frac{1}{x-2}$$

8) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $(\tan^2(x)+1)^2$. Sugestão: $t=\tan(x)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \arctan(t)$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$\int (\tan^2(x)+1)^2\,dx =$$

$$= \int (t^2+1)^2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int (1+t^2) =$$

$$= t + \frac{t^3}{3} \underset{t=\tan(x)}{=} \tan(x) + \frac{(\tan(x))^3}{3} //$$

9) (3.0 val.) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e sejam $a<b$ tais que $f'(a)\cdot f'(b)<0$. Mostre que existe $c\in\,]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

- f dif. $\Rightarrow$ f contínua $\Rightarrow$ $f|_{[a,b]}$ tem máx. e mín.
- Se $f'(a)<0$ e $f'(b)>0$, então

(i) $0 > f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Rightarrow \exists_{\delta>0}: f(x)<f(a), \forall x\in\,]a,a+\delta[$

$\Rightarrow f|_{[a,b]}$ não tem mínimo em a.

(ii) $0 < f'_e(b) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \Rightarrow \exists_{\delta>0}: f(x)<f(b), \forall x\in\,]b-\delta,b[$

$\Rightarrow f|_{[a,b]}$ não tem mínimo em b.

$\Rightarrow$ mínimo de $f|_{[a,b]}$ ocorre num ponto $c\in\,]a,b[$

$\Rightarrow f'(c)=0$ //

- Se $f'(a)>0$ e $f'(b)<0$, temos um raciocínio análogo para o máximo de $f|_{[a,b]}$, que terá que ocorrer num ponto $c\in\,]a,b[$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(c)=0$ //