Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC e LEFT

1º Sem. 2025/26 17/Out/2025 - LMAC e LEFT - v.2 Duração: 45mn

Número: **Nome:** **Curso:**

1) (1.5 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2(|1-4x|-3) \geq 0\}$.

$x^2(|1-4x|-3) \geq 0 \Leftrightarrow x=0 \vee |1-4x| \geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee (1-4x \geq 3 \vee 1-4x \leq -3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee (4x \leq -2 \vee 4x \geq 4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x \leq -1/2 \vee x \geq 1$. Logo $A =]-\infty, -1/2] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$.

2) (3.0 val.) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\cos(x+3)}}{x+3}$ $= 0$ por enquadramento:

$$-1 \leq \cos(x+3) \leq 1 \underset{x+3>0}{\overset{\text{exp. cresc.}}{\Longrightarrow}} \frac{e^{-1}}{x+3} \leq \frac{e^{\cos(x+3)}}{x+3} \leq \frac{e}{x+3}$$

$x\to+\infty \Rightarrow x\to+\infty \Leftarrow x\to+\infty$

$0 = 0 = 0$ ✓

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\arctan(x/2)}{x-2} \sin\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$ $= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\arctan(x/2)}{x} \dfrac{\sin\left(\frac{x-2}{x}\right)}{\frac{x-2}{x}}$

$$= \frac{\arctan(1)}{2} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = \frac{\pi/4}{2} \cdot 1 = \pi/8$$

$y = \dfrac{x-2}{x}$

3) (2.0 val.) Calcule $f'(x)$, sempre que exista:

(a) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{2+x}\right)$

$f'(x) = \left(\arctan\left(\sqrt{2+x}\right)\right)' = \dfrac{1}{1+(2+x)} \cdot \left(\sqrt{2+x}\right)'$

$$= \frac{1}{3+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

(b) $f'(x) = \left(\dfrac{\cosh(1/x)}{\log(1+x^2)}\right)' =$

$$= \frac{\sinh(1/x)\cdot\left(-1/x^2\right)\cdot\log(1+x^2) - \cosh(1/x)\cdot\dfrac{2x}{1+x^2}}{\left(\log(1+x^2)\right)^2} \quad //$$

4) (4.0 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2-k)3^{k-1}}{(k+1)!} = -1 + \frac{3^n}{(n+1)!} .$$

$\boxed{P(1)}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(2-k)3^{k-1}}{(k+1)!} = -1 + \frac{3}{2!} \iff \frac{1}{2!} = -1 + 3/2$

$\iff 1/2 = 1/2$ ✓

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Hipótese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2-k)3^{k-1}}{(k+1)!} = -1 + \frac{3^n}{(n+1)!}$ p/ um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Tese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2-k)3^{k-1}}{(k+1)!} = -1 + \frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$ p/ o mesmo det. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Dem.: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(2-k)3^{k-1}}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2-k)3^{k-1}}{(k+1)!} + \frac{(2-(n+1))3^n}{(n+2)!}$

$\displaystyle\overset{\text{Hip.}}{=} -1 + \frac{3^n}{(n+1)!} + \frac{(2-(n+1))3^n}{(n+2)!}$

$\displaystyle= -1 + \frac{(n+2+2-(n+1))\,3^n}{(n+2)!}$

$\displaystyle= -1 + \frac{3\cdot 3^n}{(n+2)!} = -1 + \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} \quad //$

c.q.d.

5) **(5.0 val.)** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo o $\mathbb{R}$ e dada por

$$f(x) = \begin{cases} K - \arcsin\left(\frac{x}{x+2}\right) & , \ x \geq 0\,; \\ \log\left(e^3 + x^2\right) & , \ x < 0\,; \end{cases}$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Mostre que $K = 3$. f contínua em $a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \left(K - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{x+2}\right)\right) = \lim_{x \to 0^-} \log\left(e^3 + x^2\right)$

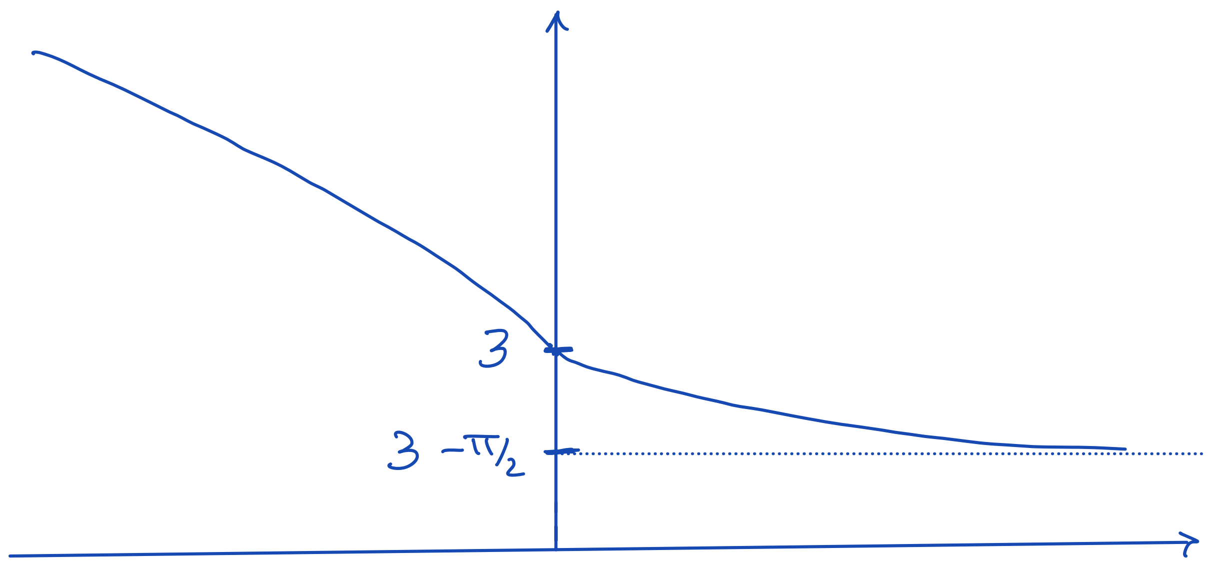
$\Rightarrow K - \operatorname{arcsen}(0) = \log(e^3) \Rightarrow \boxed{K = 3}$

(b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log\left(e^3 + x^2\right) = \log(+\infty) = +\infty$ //
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3 - \arcsin\left(\frac{x}{x+2}\right) = 3 - \arcsin(1) =$

  $= 3 - \pi/2$ //

(c) Esboce o gráfico de f e determine o seu contradomínio.



Contradomínio $= f(\mathbb{R}) = \left]3 - \pi/2, +\infty\right[$ //

6) **(1.5 val.)** A tabelas seguinte indica alguns dos valores de duas funções diferenciáveis $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e das suas derivadas $f', g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x	-1	0	1
f(x)	-2	0	2
f'(x)	-1	0	1

x	-1	0	1
g(x)	1	0	-1
g'(x)	-2	0	2

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $(f \circ g)$ no ponto de abcissa -1.

$$\left.\begin{array}{l}(f\circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(1) = 2 \\ (f\circ g)'(-1) = f'(g(-1))\cdot g'(-1) = f'(1)(-2) = -2\end{array}\right\} \Rightarrow y - 2 = -2(x - (-1))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y - 2 = -2(x+1)}$$

7) **(1.5 val.)** Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$, não-vazios e minorados com $\inf A < \inf B$. Mostre que existe $a \in A$ com $a < \inf B$.

$\boxed{\text{Res. 1}}$ (Usando propriedade característica do ínfimo)

Seja $\varepsilon = \inf B - \inf A > 0$. Temos então que

$\exists\, a \in A : a < \inf A + \varepsilon = \inf A + \inf B - \inf A = \underline{\underline{\inf B}}$

$\boxed{\text{Res. 2}}$ (por absurdo). Se não existir $a \in A$ com $a < \inf B$, temos que $\inf B \leq a, \forall a \in A \Rightarrow \inf B$ é minorante de $A \Rightarrow \inf B \leq \inf(A)$ $\cancel{\#}$ absurdo.

8) **(1.5 val.)** Seja $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Mostre que f tem máximo no intervalo $[0, 1[$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists_{0<\delta<1} : x \in]1-\delta, 1[\Rightarrow f(x) < f(0)$.

- Pelo T. Weierstrass temos que f tem máximo no intervalo $[0, 1-\delta]$, i.e. $\exists\, c \in [0, 1-\delta]$ t.q. $f(c) \geq f(x), \forall x \in [0, 1-\delta]$ $^{(1)}$. Como $0 \in [0, 1-\delta]$ temos em particular que $f(c) \geq f(0) > f(x)$, $^{(2)}$ $\forall x \in]1-\delta, 1[$. Logo, $(1) + (2) \Rightarrow f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in [0, 1[$, pelo que f tem máximo em $\underline{\underline{c}}$.

c.q.d.