Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC e LEFT

1º Sem. 2025/26 17/Out/2025 - LMAC e LEFT - v.1 Duração: 45mn

Número: **Nome:** **Curso:**

1) (1.5 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2(|1-3x|-2) \geq 0\}$.

$x^2(|1-3x|-2) \geq 0 \Leftrightarrow x=0 \vee |1-3x| \geq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee (1-3x \geq 2 \vee 1-3x \leq -2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee (3x \leq -1 \vee 3x \geq 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x \leq -1/3 \vee x \geq 1$. Logo $A =]-\infty, -1/3] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$.

2) (3.0 val.) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\cos(x+2)}}{x+2}$ $= 0$ por enquadramento:

$-1 \leq \cos(x+2) \leq 1 \underset{x+2>0}{\overset{\text{exp. cresc.}}{\Longrightarrow}} \dfrac{e^{-1}}{x+2} \leq \dfrac{e^{\cos(x+2)}}{x+2} \leq \dfrac{e}{x+2}$

$x\to+\infty$ ⇒ $x\to+\infty$ ⇐ $x\to+\infty$

$0 = 0 = 0$ ✓

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\arctan(x/3)}{x-3} \sin\left(\dfrac{x-3}{x}\right)$ $= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\arctan(x/3)}{x} \dfrac{\sin\left(\frac{x-3}{x}\right)}{\frac{x-3}{x}}$

$= \dfrac{\arctan(1)}{3} \cdot \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y)}{y} = \dfrac{\pi/4}{3} \cdot 1 = \pi/12$

$y = \dfrac{x-3}{x}$

3) (2.0 val.) Calcule $f'(x)$, sempre que exista:

(a) $f'(x) = \left(\arctan\left(\sqrt{1+x}\right)\right)'$ $= \dfrac{1}{1+(1+x)} \cdot \left(\sqrt{1+x}\right)' =$

$= \dfrac{1}{2+x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ //

(b) $f'(x) = \left(\dfrac{\sinh(1/x)}{\log(2+x^2)}\right)' =$

$$= \frac{\cosh(1/x)\cdot\left(-1/x^2\right)\cdot\log(2+x^2) - \sinh(1/x)\,\frac{2x}{2+x^2}}{\left(\log(2+x^2)\right)^2} \;//$$

4) (4.0 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(3-k)4^{k-1}}{(k+1)!} = -1 + \frac{4^n}{(n+1)!}\,.$$

$\boxed{P(1)}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{(3-k)4^{k-1}}{(k+1)!} = -1 + \frac{4}{2!} \iff \frac{2}{2!} = -1+2$

$\iff 1 = 1$ ✓

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Hipótese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(3-k)4^{k-1}}{(k+1)!} = -1 + \frac{4^n}{(n+1)!}$ p/ um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Tese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(3-k)4^{k-1}}{(k+1)!} = -1 + \frac{4^{n+1}}{(n+2)!}$ p/ o mesmo det. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Dem.: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(3-k)4^{k-1}}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(3-k)4^{k-1}}{(k+1)!} + \frac{(3-(n+1))4^n}{(n+2)!}$

$$\overset{\text{Hip.}}{=} -1 + \frac{4^n}{(n+1)!} + \frac{(3-(n+1))4^n}{(n+2)!}$$

$$= -1 + \frac{(n+2+3-(n+1))\,4^n}{(n+2)!}$$

$$= -1 + \frac{4\cdot 4^n}{(n+2)!} = -1 + \frac{4^{n+1}}{(n+2)!} \;//$$

c.q.d.

5) **(5.0 val.)** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo o $\mathbb{R}$ e dada por

$$f(x) = \begin{cases} K - \arcsin\left(\frac{x}{x+3}\right) & , \ x \geq 0\,; \\ \log\left(e^2 + x^4\right) & , \ x < 0\,; \end{cases}$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Mostre que $K = 2$. f contínua em $a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow$

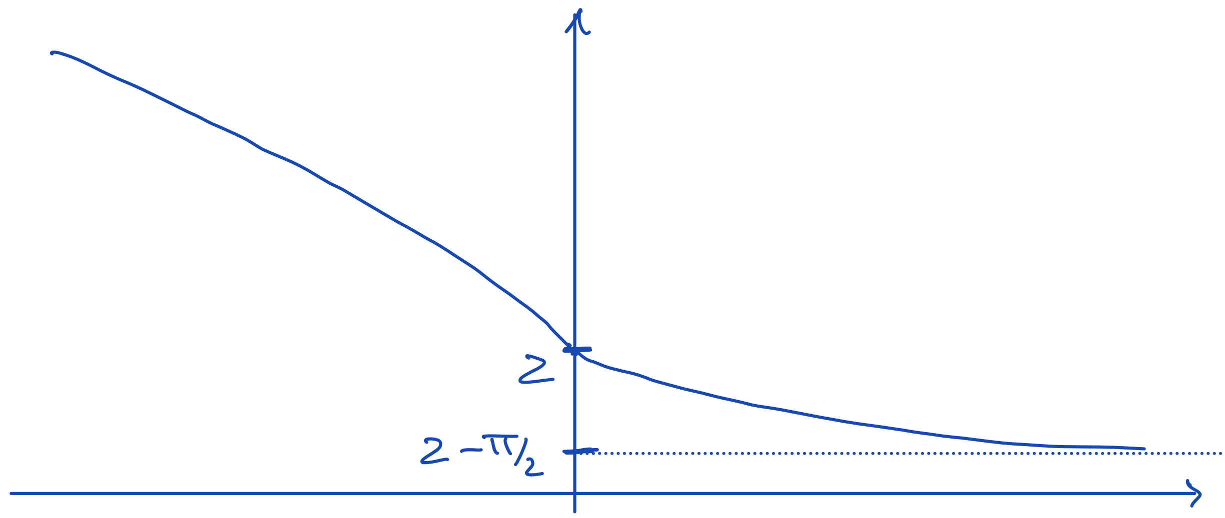
$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \left(K - \arcsen\left(\frac{x}{x+3}\right)\right) = \lim_{x\to 0^-} \log(e^2 + x^4)$

$\Rightarrow K - \arcsen(0) = \log(e^2) \Rightarrow \boxed{K = 2}$

(b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log(e^2 + x^4) = \log(+\infty) = +\infty$ //
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 - \arcsin\left(\frac{x}{x+3}\right) = 2 - \arcsin(1) =$
$= 2 - \pi/2$ //

(c) Esboce o gráfico de f e determine o seu contradomínio.



Contradomínio $= f(\mathbb{R}) = \left]2 - \pi/2, +\infty\right[$ //

6) (1.5 val.) A tabelas seguinte indica alguns dos valores de duas funções diferenciáveis $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e das suas derivadas $f', g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

x	-1	0	1
f(x)	-2	0	2
f'(x)	-1	0	1

x	-1	0	1
g(x)	1	0	-1
g'(x)	-2	0	2

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $(f \circ g)$ no ponto de abcissa 1.

$$\left.\begin{array}{l}(f\circ g)(1) = f(g(1)) = f(-1) = -2 \\ (f\circ g)'(1) = f'(g(1))\cdot g'(1) = f'(-1)\cdot 2 = -2\end{array}\right\} \Rightarrow y-(-2) = (-2)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y+2 = -2(x-1)}$$

7) (1.5 val.) Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$, não-vazios e minorados com $\inf A < \inf B$. Mostre que existe $a \in A$ com $a < \inf B$.

$\boxed{\text{Res. 1}}$ (Usando propriedade característica do ínfimo)

Seja $\varepsilon = \inf B - \inf A > 0$. Temos então que

$\exists\, a \in A : \quad a < \inf A + \varepsilon = \inf A + \inf B - \inf A = \underline{\underline{\inf B}}$

$\boxed{\text{Res. 2}}$ (por absurdo). Se não existir $a \in A$ com $a < \inf B$, temos que $\inf B \leq a, \ \forall a \in A \Rightarrow \inf B$ é minorante de $A \Rightarrow \inf B \leq \inf(A)$ ⨳ absurdo.

8) (1.5 val.) Seja $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Mostre que f tem máximo no intervalo $[0, 1[$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists_{0<\delta<1} : x \in]1-\delta, 1[\Rightarrow f(x) < f(0)$.

- Pelo T. Weierstrass temos que f tem máximo no intervalo $[0, 1-\delta]$, i.e. $\exists\, c \in [0, 1-\delta]$ t.q. $f(c) \geq f(x), \ \forall x \in [0, 1-\delta]$ (1). Como $0 \in [0, 1-\delta]$ temos em particular que $f(c) \geq f(0) > f(x)$, (2) $\forall x \in]1-\delta, 1]$. Logo, (1) + (2) $\Rightarrow f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in [0, 1[$, pelo que f tem máximo em c.

c.q.d.