Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

REPESCAGEM DO EXAME DE CDI 1 - LMAC e LEFT

1º Sem. 2024/25 05/Fev/2025 - v.2 Duração: 60mn

Número: **Nome:**

1. (2.0 val.) Calcule a derivada da função definida pela seguinte expressão:

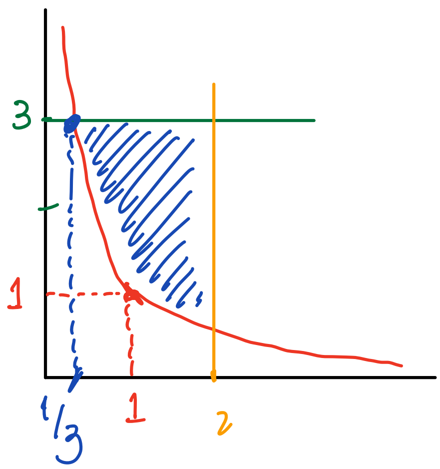
$$\left(\int_{-\sqrt{x}}^{1/x} \log(1+t^2)\, dt\,.\right)' =$$

$$= \log\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' - \log\left(1+(-\sqrt{x})^2\right)\cdot\left(-\sqrt{x}\right)'$$

$$= -\log\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\left(\frac{1}{x^2}\right) + \log\left(1+x\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad //$$

2. (2.0 val.) Esboce e determine a área da região do plano limitada pelas curvas:

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = 3 \;\text{ e }\; x = 2\,.$$



$$\text{Área} = \int_{1/3}^{2} \left(3 - 1/x\right) =$$

$$= 3\left(2 - 1/3\right) - \left[\log x\right]_{1/3}^{2} =$$

$$= 6 - 1 - \log(2) + \log(1/3)$$

$$= 5 - \log(6) \quad //$$

3. (2.0 val.) Calcule
$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx\,.$$

Sugestão: mudança de variável $t^2 = x^2 - 1$. $\Rightarrow 2t\,dt = 2x\,dx$

$x = \sqrt{2} \Rightarrow t^2 = 2-1 = 1 \Rightarrow t = 1$

$x = 2 \Rightarrow t^2 = 4-1 = 3 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, x\,dx =$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t^2+1)\,t}\, t\,dt = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \,//$$

4. (2.0 val.) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere a função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \int_1^x \frac{g(t)}{t}\, dt\,, \ \forall x > 0\,.$$

Mostre que $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{\log(x)} = g(1)$.

• g contínua $\Rightarrow$ f diferenciável e $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$.

• $$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{\log(x)} = \frac{0}{0} \underset{\text{TFC}}{\overset{\text{RC}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{g(x)/x}{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} g(x) = g(1) \,//$$

5. (4.0 val.) Classifique como convergente ou divergente cada uma das seguintes séries e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{n+1}-1}{7^n} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/3}\sin(n^{-4/3})$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{n+1}-1}{7^n} = 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{7}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n$$

séries geométricas de razão $|r|<1$, logo conv.

$$= 5\,\frac{1}{1-(-5/7)} - \frac{1}{1-(-1/7)} =$$

$$= \frac{5}{1+5/7} - \frac{1}{1+1/7} = \frac{5}{12/7} - \frac{1}{8/7} = \frac{35}{12} - \frac{7}{8} = \frac{49}{24}$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim \frac{\sin(n^{-4/3})}{n^{-4/3}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim \frac{n^{1/3}\sin(n^{-4/3})}{n^{1/3}\cdot n^{-4/3}} = 1$$

$$\Rightarrow \sum n^{1/3}\sin(n^{-4/3}) \sim \sum n^{1/3}\cdot n^{-4/3} = \sum n^{-1} = \sum \frac{1}{n}$$

= série harmónica, divergente

$\Rightarrow \sum n^{1/3}\sin(n^{-4/3})$ é divergente.

6. **(a)** (3.0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((x-3)^2\right)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$$

• Raio de Conv.: $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{2^{n+1}\sqrt{n+2}}{2^n\sqrt{n+1}} = 2$ //

$\Rightarrow$ • Abs. Conv. $|x-3|^2 < 2 \Leftrightarrow |x-3| < \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in]3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}[$ //

• Div. $|x-3|^2 > 2 \Leftrightarrow |x-3| > \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3-\sqrt{2}[\cup]3+\sqrt{2}, +\infty[$ //

• Extremos

$\boxed{x = 3-\sqrt{2}}$ $\rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\sqrt{2})^{2n}}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Como $\lim \frac{1/\sqrt{n+1}}{1/\sqrt{n}} = 1$, temos que $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que é uma série de Dirichlet com expoente $p = \frac{1}{2} \leq 1$, logo divergente.

$\boxed{x = 3+\sqrt{2}}$ $\rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

que já vimos ser divergente.

(b) (1.0 val.) Denotando por f a função definida por esta série de potências, indique $f^{(13)}(3)$.

A série de potências só tem expoentes pares pelo que $f^{(2n+1)}(3) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, $f^{(13)}(3) = 0$. //

7. (2.0 val.) Desenvolva a função $\int_0^{x^2} \cos(t^2)\, dt$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

- $$\left(\int_0^{x^2} \cos(t^2)\right)' = 2x \cos(x^4) = 2x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^4)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{8n+1}}{(2n)!},$$

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$ = maior intervalo aberto em que a série representa a função

$$\Rightarrow \int_0^{x^2} \cos(t^2) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{8n+2}}{(8n+2)(2n)!}\right) + k$$

- $x = 0 \Rightarrow \boxed{0 = k}$

8. (2.0 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que:
(i) se f é ímpar então qualquer primitiva de f é par;
(ii) se f é par então existe uma única primitiva de f que é ímpar.

(i) $f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \underset{t=-u}{=} \int_0^{-x} -f(-u)\,du = \int_0^{-x} f(u)\,du = F(-x)$

$\Rightarrow$ a primitiva F é par, pelo que qualquer outra primitiva $F + k$, $k \in \mathbb{R}$ constante, também é par.

(ii) $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \underset{t=-u}{=} \int_0^{-x} -f(-u)\,du = -\int_0^{-x} f(u)\,du = -F(-x)$

$\Rightarrow$ a primitiva F é ímpar, mas qualquer outra primitiva $F + k$, $0 \neq k \in \mathbb{R}$ constante, não é ímpar.

<u>Nota</u>: qq função ímpar é zero na origem e F é a única primitiva de f que é zero na origem.

RASCUNHO