Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

REPESCAGEM DO EXAME DE CDI 1 - LMAC e LEFT

1º Sem. 2024/25 05/Fev/2025 - v.1 Duração: 60mn

Número: **Nome:**

1. (2.0 val.) Calcule a derivada da função definida pela seguinte expressão:

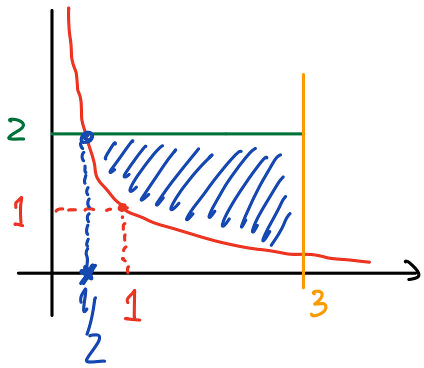
$$\left(\int_{-1/x}^{\sqrt{x}} \log(1+t^2)\, dt\,.\right)' =$$

$$= \log\left(1+(\sqrt{x})^2\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)' - \log\left(1+\left(-1/x\right)^2\right)\left(-1/x\right)'$$

$$= \log(1+x)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\times\frac{1}{x^2} \quad //$$

2. (2.0 val.) Esboce e determine a área da região do plano limitada pelas curvas:

$$y=\frac{1}{x}, \quad y=2 \ \text{ e } \ x=3\,.$$



$$\text{Área} = \int_{1/2}^{3} \left(2-\left(1/x\right)\right) =$$

$$= 2\times\left(3-1/2\right) - \Big[\log x\Big]_{1/2}^{3} =$$

$$= 6 - 1 - \log(3) + \log(1/2) = 5 - \log(6)$$

3. (2.0 val.) Calcule
$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx\,.$$
Sugestão: mudança de variável $t^2 = x^2 - 1$. $\Rightarrow 2t\,dt = 2x\,dx$

$x = \sqrt{2} \Rightarrow t^2 = 2-1 = 1 \Rightarrow t = 1$

$x = 2 \Rightarrow t^2 = 4-1 = 3 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,x\,dx =$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t^2+1)\,t}\,t\,dt = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\,//$$

4. (2.0 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere a função $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt\,,\ \forall x > 0\,.$$

Mostre que $\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{\log(x)} = f(1)$.

- f contínua $\Rightarrow$ g diferenciável e $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

- $$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{\log(x)} = \frac{0}{0} \underset{TFC}{\overset{RC}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{f(x)}{x}}{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)\,//$$

5. (4.0 val.) Classifique como convergente ou divergente cada uma das seguintes séries e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n+1}-1}{7^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/2}\sin(n^{-3/2})$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n+1}-1}{7^n} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{7}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n$

séries geométricas de razão $|r|<1$, logo conv.

$$= 3\,\frac{1}{1-(-3/7)} - \frac{1}{1-(-1/7)} =$$

$$= \frac{3}{1+3/7} - \frac{1}{1+1/7} = \frac{3}{10/7} - \frac{1}{8/7} = \frac{21}{10} - \frac{7}{8} = \frac{49}{40}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim \frac{\sin(n^{-3/2})}{n^{-3/2}} = 1$

$$\Rightarrow \lim \frac{n^{1/2}\sin(n^{-3/2})}{n^{1/2}\cdot n^{-3/2}} = 1$$

$$\Rightarrow \sum n^{1/2}\sin(n^{-3/2}) \sim \sum n^{1/2}\, n^{-3/2} = \sum n^{-1} = \sum\frac{1}{n}$$

= Série harmónica, divergente

$\Rightarrow \sum n^{1/2}\sin(n^{-3/2})$ é divergente

6. **(a)** (3.0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{3^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((x-2)^2\right)^n}{3^n\sqrt{n+1}}$$

• Raio de Conv.: $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{3^{n+1}\sqrt{n+2}}{3^n\sqrt{n+1}} = 3$ //

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \underline{\text{abs. conv.}}\ \ |(x-2)^2| < 3 \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left]2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right[\\ \bullet\ \underline{\text{div.}}\ \ |(x-2)^2| > 3 \Leftrightarrow |x-2| > \sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 2-\sqrt{3}\right[\cup \left]2+\sqrt{3}, +\infty\right[\ // \end{cases}$$

• $\underline{\text{Extremos}}$:

$\boxed{x = 2-\sqrt{3}} \rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\sqrt{3})^{2n}}{3^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Como $\lim \frac{1/\sqrt{n+1}}{1/\sqrt{n}} = 1$, temos que $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que é uma série de Dirichlet com expoente $p = \frac{1}{2} \leq 1$, logo $\underline{\text{divergente}}$.

$\boxed{x = 2+\sqrt{3}} \rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{3})^{2n}}{3^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ que já vimos ser $\underline{\text{divergente}}$.

(b) (1.0 val.) Denotando por f a função definida por esta série de potências, indique $f^{(17)}(2)$.

A série de potências só tem expoentes pares pelo que $f^{(2n+1)}(2) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Em particular,

$f^{(17)}(2) = 0$. //

7. (2.0 val.) Desenvolva a função $\int_0^{x^2} \sin(t^2)\, dt$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

$$\bullet \left(\int_0^{x^2} \sin(t^2)\, dt \right)' = 2x \sin(x^4) =$$

$$= 2x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^4)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{8n+5}}{(2n+1)!},$$

$\forall \underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$ = maior intervalo aberto em que a série representa a função

$$\Rightarrow \int_0^{x^2} \sin(t^2)\, dt = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{8n+6}}{(8n+6)(2n+1)!} \right) + k$$

$\bullet$ $x = 0 \Rightarrow \boxed{0 = k}$

8. (2.0 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que:
(i) se f é ímpar então qualquer primitiva de f é par;
(ii) se f é par então existe uma única primitiva de f que é ímpar.

(i) $f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \underset{t=-u}{=} \int_0^{-x} -f(-u)\,du = \int_0^{-x} f(u)\,du = F(-x)$

$\Rightarrow$ a primitiva F é par, pelo que qualquer outra primitiva $F + k$, $k \in \mathbb{R}$ constante, também é par.

(ii) $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \underset{t=-u}{=} \int_0^{-x} -f(-u)\,du = -\int_0^{-x} f(u)\,du = -F(-x)$

$\Rightarrow$ a primitiva F é ímpar, mas qualquer outra primitiva $F + k$, $0 \neq k \in \mathbb{R}$ constante, não é ímpar.

<u>Nota</u>: qq função ímpar é zero na origem e F é a única primitiva de f que é zero na origem.

RASCUNHO