Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

REPESCAGEM DO 2º MAP45 DE CDI 1 - LMAC E LEFT

1º Sem. 2024/25 05/Fev/2025 - LMAC e LEFT - v.2 Duração: 45mn

Número: **Nome:**

1. (2,0 val.) Calcule a derivada da função definida pela seguinte expressão: $\dfrac{\arcsin(x)}{1+\sinh(x^2)}$.

$$\left(\frac{\arcsin(x)}{1+\sinh(x^2)}\right)' = \frac{(\arcsin(x))'\,(1+\sinh(x^2)) - \arcsin(x)\,(1+\sinh(x^2))'}{(1+\sinh(x^2))^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1+\sinh(x^2)) - \arcsin(x)\cdot\cosh(x^2)\cdot 2x}{(1+\sinh(x^2))^2}$$

2. (3,0 val.) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \arctan(\sin(x))}{x^2}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

é diferenciável em zero? Justifique.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x-\arctan(\sin(x))}{x^2} - 0}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan(\sin(x))}{x^3} = \frac{0}{0} =$$

$$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin^2(x) - \cos(x)}{3x^2\underbrace{(1+\sin^2(x))}_{\to 1}}$$

$$= \frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}_{=1} + \frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{=0/0}$$

$$\overset{R.C.}{=} 1/3 + 1/3 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{3} + 1/6 = 1/2 \ //$$

$\Rightarrow f$ é dif. em 0 e $f'(0) = 1/2$ //.

3. (2.0 val.) Calcule: $\lim_{x\to 0^+} \left(e^{x/2}-1\right)^{3x}$. $= 1^0 =$ indet.

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\log\left(\left(e^{x/2}-1\right)^{3x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{3x\log\left(e^{x/2}-1\right)} = e^0 = 1 \,//$$

$\boxed{C.A.}$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log\left(e^{x/2}-1\right)}{1/x} = \dfrac{\infty}{\infty} =$

$\underset{=}{R.C.}$ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{2}e^{x/2}/\left(e^{x/2}-1\right)}{-1/x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{e^{x/2}-1} = \dfrac{0}{0} =$

$\underset{=}{R.C.}$ $-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2x}{\frac{1}{2}e^{x/2}} = 0 \,//$

4. (2.0 val.) Determine uma primitiva da função $\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$. $= \dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2} =$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

$\Rightarrow A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = x^2+1$

$x=0 \Rightarrow \boxed{A=1}$ $\quad x=1 \Rightarrow \boxed{C=2}$

$x=-1 \Rightarrow 4 + 2B - 2 = 2 \Rightarrow 2B = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x} = \int \frac{1}{x} + \int \frac{2}{(x-1)^2} =$$

$$= \log|x| - \frac{2}{x-1} \,//$$

5. (6,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $(x\log(x))^2$ (c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (sugestão: $t^2 = x^2-1$))

$$(a)\ \int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -2\sqrt{1-x^2} - \arcsin(x) \ //$$

$$(b)\ \int \underbrace{x^2}_{v'} \underbrace{(\log x)^2}_{u} = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \underbrace{(\log x)^2}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \cdot \underbrace{2\log(x)\cdot\frac{1}{x}}_{u'}$$

$$= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2 \log x =$$

$$= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{9}x^3\log x + \frac{2}{9}\,\frac{x^3}{3} \ //$$

$$(c)\ \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,x\,dx$$

$t^2 = x^2-1$

$\Rightarrow 2t\,dt = 2x\,dx$

$$= \int \frac{1}{(t^2+1)\,t}\,t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t) =$$

$$= \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) \ //$$

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 6 vezes diferenciável tal que o seu polinómio de Taylor de ordem 5 no ponto $a = 0$ é dado por $p_{5,0}(x) = x^2 - x^4/6$.

(a) (1.0 val.) Decida se f tem ou não um extremo local em 0, classificando-o em caso afirmativo.

$g'(0) = 0$ e $g''(0) = 1 \Rightarrow g$ tem mínimo local em 0.

(b) (2.0 val.) Suponha que $|f^{(6)}(x)| \leq 6 + |x|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Mostre que então $f(1)$ é aproximadamente igual a $5/6$ com erro inferior a $0,01$.

• $$g(1) - p_{5,0}(1) = \frac{g^{(6)}(\theta)}{6!}(1-0)^6, \text{ com } \theta \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \left| g(1) - \frac{5}{6} \right| = \frac{|g^{(6)}(\theta)|}{6!} \leq \frac{6+|\theta|}{6!} \leq \frac{7}{6!} =$$

$$= \frac{7}{720} < 0{,}01 \ //$$

7. (2.0 val.) Seja $g \in C^2(\mathbb{R})$ uma função limitada. Mostre que a sua segunda derivada g'' tem pelo menos um zero.

Suponhamos por absurdo que f'' não tem zeros. Então, como é contínua, temos que $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ou $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Então f' é estritamente crescente e existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(a) \neq 0$.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $f'(a) > 0$. Aplicando o T. Lagrange a intervalos da forma $[a,x]$, com $x > a$, obtemos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq f'(a) \Rightarrow f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

$\Rightarrow f$ não é limitada $\#$ absurdo.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $f'(a) < 0$. Análogo aplicando o T. Lag. a intervalos da forma $[x,a]$, com $x < a$. //