Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

REPESCAGEM DO 2º MAP45 DE CDI 1 - LMAC E LEFT

1º Sem. 2024/25 05/Fev/2025 - LMAC e LEFT - v.1 Duração: 45mn

Número: **Nome:**

1. (2,0 val.) Calcule a derivada da função definida pela seguinte expressão: $\dfrac{1+\arcsin(x)}{\cosh(x^2)}$.

$$\left(\frac{1+\arcsin(x)}{\cosh(x^2)}\right)' = \frac{(1+\arcsin(x))'\cosh(x^2) - (1+\arcsin(x))(\cosh(x^2))'}{(\cosh(x^2))^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\cosh(x^2) - (1+\arcsin(x))(\sinh(x^2)\cdot 2x)}{(\cosh(x^2))^2}$$

2. (3,0 val.) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(\sin(x)) - x}{x^2}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

é diferenciável em zero? Justifique.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\arctan(\sin(x))-x}{x^2} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(\sin(x)) - x}{x^3} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x) - 1 - \sin^2(x)}{\underbrace{3(1+\sin^2(x))}_{\to 1}x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-1}{x^2} - \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right] = \frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right]}_{0/0} - \frac{1}{3}$$

$$\overset{R.C.}{=} \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2x} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\,//$$

$\Rightarrow$ f é dif. em 0 e $f'(0) = -\frac{1}{2}\,//$

3. (2.0 val.) Calcule: $\lim_{x\to 0^+} \left(e^{x/3}-1\right)^{2x}$. $= 1^0 = \text{indet} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\log\left(\left(e^{x/3}-1\right)^{2x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{2x\log\left(e^{x/3}-1\right)} = e^0 = 1 \, //$$

$\boxed{\text{C.A.}}$ $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(e^{x/3}-1\right)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{R.C.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}e^{x/3}/\left(e^{x/3}-1\right)}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{3}\frac{x^2}{e^{x/3}-1} = \frac{0}{0} \overset{\text{R.C.}}{=} -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\frac{1}{3}e^{x/3}} = 0 \, //$$

4. (2.0 val.) Determine uma primitiva da função $\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}$. $= \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} =$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = x^2+1$$

$x=0 \Rightarrow \boxed{A = 1}$ $\quad x=-1 \Rightarrow -C = 2 \Rightarrow \boxed{C=-2}$

$x=1 \Rightarrow 4 + 2B - 2 = 2 \Rightarrow 2B = 0 \Rightarrow \boxed{B=0}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x} = \int \frac{1}{x} - 2\int \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \log|x| + \frac{2}{x+1} \, //$$

5. (6,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $(x\log(x))^2$ (c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (sugestão: $t^2 = x^2 - 1$))

(a) $\displaystyle\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + 2\sqrt{1-x^2}$ //

(b) $\displaystyle\int \underbrace{x^2}_{v'} \underbrace{(\log x)^2}_{u} = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \underbrace{(\log x)^2}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \cdot \underbrace{2\log(x) \cdot \frac{1}{x}}_{u'}$

$\displaystyle = \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2 \log x =$

$\displaystyle = \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\right]$

$\displaystyle = \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{9}x^3\log x + \frac{2}{9}\frac{x^3}{3}$ //

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,x\,dx$

$t^2 = x^2-1$

$\Rightarrow 2t\,dt = 2x\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{1}{(t^2+1)\,t}\,t\,dt$

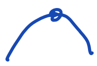
$\displaystyle = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t) =$

$= \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$ //

6. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 6 vezes diferenciável tal que o seu polinómio de Taylor de ordem 5 no ponto $a = 0$ é dado por $p_{5,0}(x) = -x^2 + x^4/6$.

(a) (1.0 val.) Decida se g tem ou não um extremo local em 0, classificando-o em caso afirmativo.

$g'(0) = 0$ e $g''(0) = -2 \Rightarrow g$ tem máximo local em 0.



(b) (2.0 val.) Suponha que $|g^{(6)}(x)| \leq 6 + |x|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Mostre que então $g(1)$ é aproximadamente igual a $-5/6$ com erro inferior a $0,01$.

- $g(1) - p_{5,0}(1) = \dfrac{g^{(6)}(\theta)}{6!}(1-0)^6$, com $\theta \in [0,1]$

$$\Rightarrow \left| g(1) - \left(-5/6\right) \right| = \frac{|g^{(6)}(\theta)|}{6!} \leq \frac{6+|\theta|}{6!} \leq \frac{7}{6!} =$$

$$= \frac{7}{720} < 0,01 \ //$$

7. (2.0 val.) Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ uma função limitada. Mostre que a sua segunda derivada f'' tem pelo menos um zero.

Suponhamos por absurdo que f'' não tem zeros. Então, como é contínua, temos que $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ou $f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Então f' é estritamente crescente e existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(a) \neq 0$.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $f'(a) > 0$. Aplicando o T. Lagrange a intervalos da forma $[a, x]$, com $x > a$, obtemos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq f'(a) \Rightarrow f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$$

$\Rightarrow f$ não é limitada $\#$ absurdo.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $f'(a) < 0$. Análogo aplicando o T. Lag. a intervalos da forma $[x, a]$, com $x < a$. //