Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

REPESCAGEM DO 1º MAP45 DE CDI 1 - LMAC e LEFT

1º Sem. 2024/25 05/Fev/2025 - LMAC e LEFT - v.2 Duração: 45mn

Número: **Nome:** **Curso:**

1. (2.0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq 1 + |x|\}$.

$$|x-2| \geq 1+|x| \Leftrightarrow x-2 \geq 1+|x| \vee x-2 \leq -1-|x|$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq x-3 \vee |x| \leq -x+1$$

$$\Leftrightarrow (x \leq x-3 \wedge x \geq -x+3) \vee (x \leq -x+1 \wedge x \geq x-1)$$

$$\Leftrightarrow (\underbrace{0 < -3}_{F} \wedge 2x \geq 3) \vee (2x \leq 1 \wedge \underbrace{0 \geq -1}_{V})$$

$$\Leftrightarrow (x \leq 1/2)$$

Logo, $A =]-\infty, 1/2]$ //.

2. (1.5 val.) Calcule o seguinte limite: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \cos(x)}{\cosh(2x)}$. $= 0$

- $\dfrac{e^x}{\cosh(2x)} = \dfrac{e^x}{\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}} = \dfrac{2}{e^x + e^{-3x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

- $-1 \leq \cos(x) \leq 1 \underset{(x>0)}{\Rightarrow} \dfrac{-e^x}{\cosh(2x)} \leq \dfrac{e^x \cos(x)}{\cosh(2x)} \leq \dfrac{e^x}{\cosh(2x)}$

$x \to +\infty$: $\dfrac{-e^x}{\cosh(2x)} \to 0 \Rightarrow \dfrac{e^x \cos(x)}{\cosh(2x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ // $\Leftarrow \dfrac{e^x}{\cosh(2x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

3. (1.5 val.) Calcule a derivada da função definida pela seguinte expressão: $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x})}{1+\sinh(x^2)}$.

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(\sqrt{x})}{1+\sinh(x^2)}\right)' = \frac{(\sin(\sqrt{x}))'(1+\sinh(x^2)) - \sin(\sqrt{x})(1+\sinh(x^2))'}{(1+\sinh(x^2))^2}$$

$$= \frac{\cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (1+\sinh(x^2)) - \sin(\sqrt{x})(\cosh(x^2) \cdot 2x)}{(1+\sinh(x^2))^2}$$

//

4. (4.0 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{n!\,3^n}\ .$$

$\boxed{P(1)}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{1!\,3^1} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ ✓

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

<u>Hipótese</u>: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{n!\,3^n}$ p/ um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo

<u>Tese</u>: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,3^{n+1}}$ p/ o mesmo $n \in \mathbb{N}$ fixo

<u>Prova</u>: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k!\,3^k} + \frac{3(n+1)-1}{(n+1)!\,3^{n+1}}$

$$\underset{\text{hip.}}{=} 1 - \frac{1}{n!\,3^n} + \frac{3n+2}{(n+1)!\,3^{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{(n+1)\cdot 3 - 3n - 2}{(n+1)!\,3^{n+1}} = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,3^{n+1}} \quad //$$

c.q.d.

5. (6.0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo o $\mathbb{R}$ e dada por

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin(1/x) & , \ |x| \geq 1\,; \\ K \arctan(x) & , \ |x| < 1\,; \end{cases}$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Mostre que f é uma função ímpar.

- $f(x) = -f(-x)$ quando $|x| > 1$ porque arcsin e $1/x$ são funções ímpares.
- $f(x) = -f(-x)$ quando $|x| \leq 1$ porque arctan também é uma função ímpar.

(b) Determine o valor da constante $K \in \mathbb{R}$.

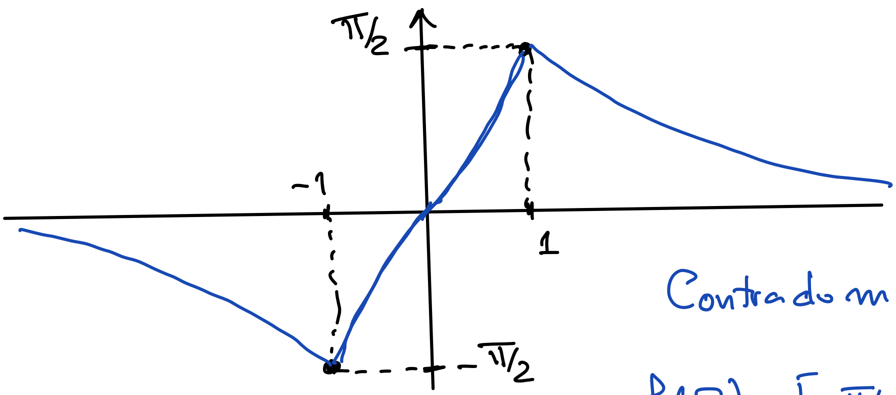
$$f(1) = \arcsin(1) = \pi/2 = \lim_{x \to 1^-} K \arctan(x) =$$

$$= K \arctan(1) = K \frac{\pi}{4} \Rightarrow K \pi/4 = \pi/2 \Rightarrow \boxed{K = 2}$$

(c) Calcule $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \arcsin(1/x) = \arcsin(0) = 0 \;//$$

(d) Esboce o gráfico de f e determine o seu contradomínio.



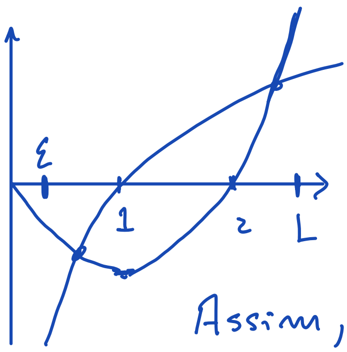
Contradomínio:

$f(\mathbb{R}) = [-\pi/2, \pi/2] \;//$

6. (1,0 val.) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis tais que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1/2$, $g(1) = 0$ e $g'(1) = -2$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $(f \circ g)$ no ponto de abcissa $x = 1$.

- $(f\circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 0$
- $(f\circ g)'(1) = f'(g(1))\cdot g'(1) = \frac{1}{2}\times(-2) = -1$
- $y - y_0 = m(x-x_0) \Rightarrow y - 0 = -1(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = -x+1}$

7. (2,0 val.) Mostre que a equação $x^2 - 2x = \log(x)$ tem duas soluções.



Seja $h(x) = \log(x) - (x^2 - 2x)$.

- $h(\varepsilon) < 0$ para $\varepsilon > 0$ suf. pequeno.
- $h(1) = 0 - (1-2) = 1 > 0$
- $h(L) < 0$ para $L > 2$ suf. grande.

Assim, pelo TVI, h tem 1 zero em $]0,1[$ e outro em $]1,+\infty[$.

8. (2,0 val.) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $h(0) < h(\pi/2) = h(-\pi/2)$. Mostre que a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = h(\arctan x)$ tem mínimo absoluto.

- h contínua em $[-\pi/2, \pi/2] \xRightarrow{\text{T. Weierstrass}} h$ tem mín. absoluto em $[-\pi/2, \pi/2]$
- $h(0) < h(\pi/2) = h(-\pi/2) \Rightarrow$ esse mín. absoluto ocorre em $]-\pi/2, \pi/2[$, i.e. $\exists\, a \in]-\pi/2, \pi/2[$ t.q. $h(a) \leq h(y)$, $\forall y \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- $\arctan(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[\Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.q. $\arctan(b) = a$.
- ψ tem mín. absoluto em b porque

$$\psi(b) = h(\arctan(b)) = h(a) \leq h(\underbrace{\arctan x}_{=\, y\, \in\,]-\pi/2,\pi/2[}) = \psi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

//