Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

REPESCAGEM DO 1º MAP45 DE CDI 1 - LMAC e LEFT

1º Sem. 2024/25 05/Fev/2025 - LMAC e LEFT - v.1 Duração: 45mn

Número: **Nome:** **Curso:**

1. (2.0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \geq 1 + |x|\}$.

$|x+2| \geq 1+|x| \Leftrightarrow x+2 \geq 1+|x| \vee x+2 \leq -1-|x|$

$\Leftrightarrow |x| \leq x+1 \vee |x| \leq -x-3$

$\Leftrightarrow (x \leq x+1 \wedge x \geq -x-1) \vee (x \leq -x-3 \wedge x \geq x+3)$

$\Leftrightarrow (\underbrace{0 \leq 1}_{V} \wedge 2x \geq -1) \vee (2x \leq -3 \wedge \underbrace{0 \geq 3}_{F})$

$\Leftrightarrow (x \geq -1/2)$.

Logo, $A = [-1/2, +\infty[$ //.

2. (1.5 val.) Calcule o seguinte limite: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x \sin(x)}{\sinh(2x)}$. $= 0$

- $\frac{e^x}{\sinh(2x)} = \frac{e^x}{\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}} = \frac{2}{e^x - e^{-3x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

- $-1 \leq \sin(x) \leq 1 \underset{(x>0)}{\Rightarrow} \frac{-e^x}{\sinh(2x)} \leq \frac{e^x \sin(x)}{\sinh(2x)} \leq \frac{e^x}{\sinh(2x)}$

$x\to+\infty$: $\frac{-e^x}{\sinh(2x)} \to 0 \Rightarrow \frac{e^x \sin(x)}{\sinh(2x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ // $\Leftarrow \frac{e^x}{\sinh(2x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

3. (1.5 val.) Calcule a derivada da função definida pela seguinte expressão: $f(x) = \frac{1+\cos(\sqrt{x})}{\cosh(x^2)}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1+\cos(\sqrt{x})}{\cosh(x^2)}\right)' = \frac{(1+\cos(\sqrt{x}))'\cosh(x^2) - (1+\cos\sqrt{x})(\cosh(x^2))'}{\cosh^2(x^2)}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cosh(x^2) - (1+\cos\sqrt{x})\operatorname{senh}(x^2)\cdot 2x}{\cosh^2(x^2)}$$ //

4. (4.0 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = 1 - \frac{1}{n!\,2^n} .$$

$\boxed{P(1)}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = 1 - \frac{1}{1!\,2^1} \iff \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Hipótese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = 1 - \frac{1}{n!\,2^n}$ p/ um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo

Tese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}}$ p/ o mesmo $n \in \mathbb{N}$ fixo

Prova: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k!\,2^k} + \frac{2(n+1)-1}{(n+1)!\,2^{n+1}}$

$$\overset{\text{hip.}}{=} 1 - \frac{1}{n!\,2^n} + \frac{2n+1}{(n+1)!\,2^{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{(n+1)\cdot 2 - 2n-1}{(n+1)!\,2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}} \quad //$$

c.q.d.

5. (6.0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo o $\mathbb{R}$ e dada por

$$f(x) = \begin{cases} K \arcsin(1/x) & , \ |x| > 1\,; \\ \arctan(x) & , \ |x| \leq 1\,; \end{cases}$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Mostre que f é uma função ímpar.

- $f(x) = -f(-x)$ quando $|x| > 1$ porque arcsin e $1/x$ são funções ímpares.
- $f(x) = -f(-x)$ quando $|x| \leq 1$ porque arctan também é uma função ímpar.

(b) Determine o valor da constante $K \in \mathbb{R}$.

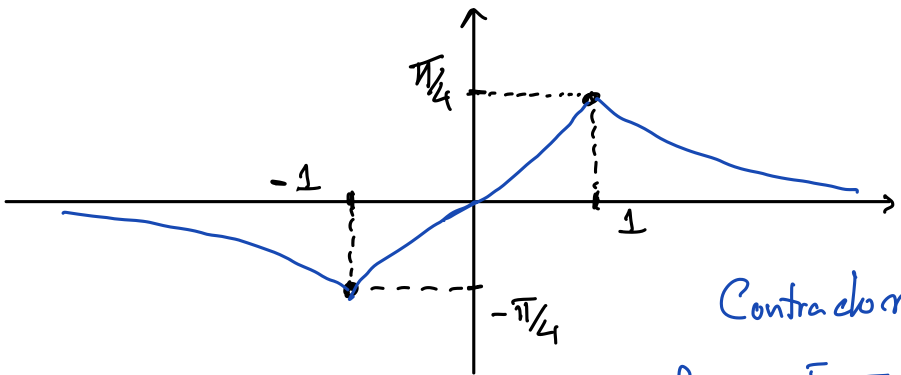
$$f(1) = \arctan(1) = \pi/4 = \lim_{x \to 1^+} K \arcsin(1/x) =$$

$$= K \arcsin(1) = K\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = K\,\pi/2 \Rightarrow \boxed{K = 1/2}$$

(c) Calcule $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} K \arcsin(1/x) = K \arcsin(0) = 0 \ //$$

(d) Esboce o gráfico de f e determine o seu contradomínio.



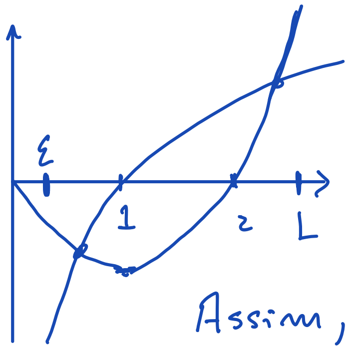
Contradomínio:

$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \ //$

6. (1,0 val.) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis tais que $f(0) = 0$, $f'(0) = -1/2$, $g(1) = 0$ e $g'(1) = 2$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $(f \circ g)$ no ponto de abcissa $x = 1$.

- $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 0$
- $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$
- $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -1(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = -x + 1}$

7. (2,0 val.) Mostre que a equação $\log(x) = x^2 - 2x$ tem duas soluções.



Seja $h(x) = \log(x) - (x^2 - 2x)$.

- $h(\varepsilon) < 0$ para $\varepsilon > 0$ suf. pequeno.
- $h(1) = 0 - (1-2) = 1 > 0$
- $h(L) < 0$ para $L > 2$ suf. grande.

Assim, pelo TVI, h tem 1 zero em $]0,1[$ e outro em $]1,+\infty[$.

8. (2,0 val.) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $h(0) > h(\pi/2) = h(-\pi/2)$. Mostre que a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = h(\arctan x)$ tem máximo absoluto.

- h contínua em $[-\pi/2, \pi/2] \xRightarrow{\text{T. Weierstrass}} h$ tem máx. absoluto em $[-\pi/2, \pi/2]$
- $h(0) > h(\pi/2) = h(-\pi/2) \Rightarrow$ esse máx. absoluto ocorre em $]-\pi/2, \pi/2[$, i.e. $\exists\, a \in]-\pi/2, \pi/2[$ t.q. $h(a) \geq h(y)$, $\forall y \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- $\arctan(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[\Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.q. $\arctan(b) = a$.
- ψ tem máx. absoluto em b porque

$$\psi(b) = h(\arctan(b)) = h(a) \geq h(\underbrace{\arctan x}_{= y \in]-\pi/2, \pi/2[}) = \psi(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

//