Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC e LEFT

1º Sem. 2024/25 05/Fev/2025 - v.2 Duração: 120mn

Número: **Nome:**

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq 1 + |x|\}$.

$|x-2| \geq 1+|x| \Leftrightarrow x-2 \geq 1+|x| \vee x-2 \leq -1-|x|$

$\Leftrightarrow |x| \leq x-3 \vee |x| \leq -x+1$

$\Leftrightarrow (x \leq x-3 \wedge x \geq -x+3) \vee (x \leq -x+1 \wedge x \geq x-1)$

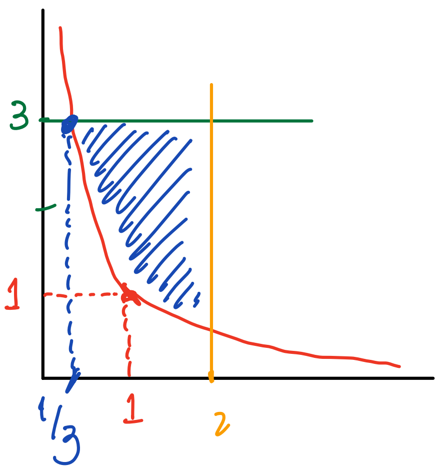
$\Leftrightarrow (\underbrace{0 < -3}_{F} \wedge 2x \geq 3) \vee (2x \leq 1 \wedge \underbrace{0 \geq -1}_{V})$

$\Leftrightarrow (x \leq 1/2)$

Logo, $A =]-\infty, 1/2]$ //.

2. (1,0 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = 3 \quad \text{e} \quad x = 2.$$



$$\text{Área} = \int_{1/3}^{2} (3 - 1/x) =$$

$$= 3(2 - 1/3) - [\log x]_{1/3}^{2} =$$

$$= 6 - 1 - \log(2) + \log(1/3)$$

$$= 5 - \log(6) //$$

3. (2,0 val.)

(a) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{n!\,3^n} .$$

$\boxed{P(1)}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{1!\,3^1} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ ✓

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Hipótese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{n!\,3^n}$ p/ um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo

Tese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,3^{n+1}}$ p/ o mesmo $n \in \mathbb{N}$ fixo

Prova: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k!\,3^k} + \frac{3(n+1)-1}{(n+1)!\,3^{n+1}}$

$$\overset{\text{hip.}}{=} 1 - \frac{1}{n!\,3^n} + \frac{3n+2}{(n+1)!\,3^{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{(n+1)\cdot 3 - 3n - 2}{(n+1)!\,3^{n+1}} = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,3^{n+1}} \quad //$$

c.q.d.

(b) Justifique que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-1}{k!\,3^k}$$

é convergente e calcule a sua soma.

Pela alínea anterior, temos que a sucessão das somas parciais desta série, $s_n = \sum_{k=1}^{n} (3k-1)/k!\,3^k$, é dada por $s_n = 1 - \frac{1}{n!\,3^n}$. Como s_n é conv. e $\lim s_n = 1$, concluimos que a série é convergente e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1$. ✓

4. (2,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \arctan(\sin(x))}{x^2}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = 1/2$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x - \arctan(\sin(x))}{x^2} - 0}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan(\sin(x))}{x^3} = \frac{0}{0} =$$

$$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1+\sin^2(x) - \cos(x)}{3x^2 \underbrace{(1+\sin^2(x))}_{\to 1}}$$

$$= \frac{1}{3} \underbrace{\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}_{=1} + \frac{1}{3} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{= 0/0}$$

$$\overset{R.C.}{=} 1/3 + 1/3 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{3} + 1/6 = 1/2 \,//$$

$\Rightarrow$ f é dif. em 0 e $f'(0) = 1/2$ //.

(b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(1) = 0$ e $g'(1) = -2$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $(f \circ g)$ no ponto de abcissa $x = 1$.

- $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 0$
- $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$
- $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -1(x-1) \Leftrightarrow \boxed{y = -x + 1}$

5. (2,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a)\ \frac{\arcsin(x)}{1+\sinh(x^2)}\,; \qquad b)\ \int_{-\sqrt{x}}^{1/x} \log(1+t^2)\ dt\,.$$

a)

$$\left(\frac{\arcsin(x)}{1+\sinh(x^2)}\right)' = \frac{(\arcsin(x))'(1+\sinh(x^2)) - \arcsin(x)(1+\sinh(x^2))'}{(1+\sinh(x^2))^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1+\sinh(x^2)) - \arcsin(x)\cdot\cosh(x^2)\cdot 2x}{(1+\sinh(x^2))^2} \ //$$

b)

$$\left(\int_{-\sqrt{x}}^{1/x} \log(1+t^2)\,dt\right)' = \log\left(1+\left(\tfrac{1}{x}\right)^2\right)\times\left(\tfrac{1}{x}\right)' - \log\left(1+(-\sqrt{x})^2\right)(-\sqrt{x})'$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) + \log(1+x)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \ //$$

6. (1,0 val.) Calcule:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(e^{x/2}-1\right)^{3x} = 1^0 = \text{indet.}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\log((e^{x/2}-1)^{3x})} = \lim_{x\to 0^+} e^{3x\log(e^{x/2}-1)} = e^0 = 1 \ //$$

$\boxed{\text{C.A.}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(e^{x/2}-1)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} =$

$\overset{\text{R.C.}}{=} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\tfrac{1}{2}e^{x/2}/(e^{x/2}-1)}{-1/x^2} = -\tfrac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{e^{x/2}-1} = \frac{0}{0} =$

$\overset{\text{R.C.}}{=} \displaystyle -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\tfrac{1}{2}e^{x/2}} = 0 \ //$

7. (3,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $(x\log(x))^2$ (c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (sugestão: $t^2 = x^2-1$))

$$\text{(a)} \int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -2\sqrt{1-x^2} - \arcsin(x) \quad //$$

$$\text{(b)} \int \underbrace{x^2}_{v'} \underbrace{(\log x)^2}_{u} = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \underbrace{(\log x)^2}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \cdot \underbrace{2\log(x) \cdot \frac{1}{x}}_{u'}$$

$$= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2 \log x =$$

$$= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\right]$$

$$= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \log x + \frac{2}{9}\frac{x^3}{3} \quad //$$

$$\text{(c)} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,x\,dx$$

$t^2 = x^2 - 1$

$\Rightarrow 2t\,dt = 2x\,dx$

$$= \int \frac{1}{(t^2+1)\,t}\,t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t) =$$

$$= \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) \quad //$$

8. (2,0 val.) Determine a natureza das seguintes séries numéricas e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{5^{n+1}-1}{7^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{1/3} \sin(n^{-4/3}).$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{n+1}-1}{7^n} = 5\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{7}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n$

séries geométricas de razão $|r|<1$, logo conv.

$$= 5\,\frac{1}{1-(-5/7)} - \frac{1}{1-(-1/7)} =$$

$$= \frac{5}{1+5/7} - \frac{1}{1+1/7} = \frac{5}{12/7} - \frac{1}{8/7} = \frac{35}{12} - \frac{7}{8} = \frac{49}{24}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim \frac{\sin(n^{-4/3})}{n^{-4/3}} = 1$

$$\Rightarrow \lim \frac{n^{1/3}\sin(n^{-4/3})}{n^{1/3}\cdot n^{-4/3}} = 1$$

$$\Rightarrow \sum n^{1/3}\sin(n^{-4/3}) \sim \sum n^{1/3}\cdot n^{-4/3} = \sum n^{-1} = \sum \frac{1}{n}$$

= série harmónica, divergente

$\Rightarrow \sum n^{1/3}\sin(n^{-4/3})$ é divergente.

9. **(a)** (1,5 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2^n\sqrt{n+1}} \cdot = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((x-3)^2\right)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$$

• Raio de Conv. : $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{2^{n+1}\sqrt{n+2}}{2^n\sqrt{n+1}} = 2$ //

$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Abs. Conv. } |x-3|^2 < 2 \Leftrightarrow |x-3| < \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in]3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}[\ // \\ \bullet \text{ Div. } |x-3|^2 > 2 \Leftrightarrow |x-3| > \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3-\sqrt{2}[\cup]3+\sqrt{2}, +\infty[\ // \end{cases}$

• Extremos

$\boxed{x = 3-\sqrt{2}} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\sqrt{2})^{2n}}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Como $\lim \frac{1/\sqrt{n+1}}{1/\sqrt{n}} = 1$, temos que $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que é uma série de Dirichlet com expoente $p = \frac{1}{2} \leq 1$, logo divergente.

$\boxed{x = 3+\sqrt{2}} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2n}}{2^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

que já vimos ser divergente.

(b) (0,5 val.) Denotando por f a função definida por esta série de potências, indique $f^{(13)}(3)$.

A série de potências só tem expoentes pares pelo que $f^{(2n+1)}(3) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, $f^{(13)}(3) = 0$. //

10. (1.0 val.) Desenvolva a função $\int_0^{x^2} \cos(t^2)\,dt$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

- $\left(\int_0^{x^2} \cos(t^2) \right)' = 2x \cos(x^4) = 2x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^4)^{2n}}{(2n)!} =$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{8n+1}}{(2n)!} ,$$

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$ = maior intervalo aberto em que a série representa a função

$$\Rightarrow \int_0^{x^2} \cos(t^2) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{8n+2}}{(8n+2)(2n)!} \right) + K$$

- $x = 0 \Rightarrow \boxed{0 = K}$

11. (1,0 val.) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $h(0) < h(\pi/2) = h(-\pi/2)$. Mostre que a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = h(\arctan x)$ tem mínimo absoluto.

- h contínua em $[-\pi/2, \pi/2] \xRightarrow{\text{T. Weierstrass}} h$ tem mín. absoluto em $[-\pi/2, \pi/2]$
- $h(0) < h(\pi/2) = h(-\pi/2) \Rightarrow$ esse mín. absoluto ocorre em $]-\pi/2, \pi/2[$, i.e. $\exists\, a \in\,]-\pi/2, \pi/2[$ t.q. $h(a) \leq h(y)$, $\forall y \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- $\arctan(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[\Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.q. $\arctan(b) = a$.
- ψ tem mín. absoluto em b porque

$$\psi(b) = h(\arctan(b)) = h(a) \leq h(\underbrace{\arctan x}_{= y \,\in\,]-\pi/2, \pi/2[}) = \psi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

12. (2,0 val.) Seja $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e considere a função $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_1^x \frac{g(t)}{t}\, dt\,,\ \forall x \geq 1\,.$$

(a) Mostre que $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{\log(x)} = g(1)$.

- g contínua $\Rightarrow$ f diferenciável e $\lim_{x \to 1} g(x) = g(1)$.
- $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{\log(x)} = \frac{0}{0} \overset{RC}{\underset{TFC}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{g(x)/x}{1/x} =$

$= \lim_{x \to 1} g(x) = g(1)$ //

(b) Mostre que se g for crescente então $\frac{f(x)}{\log(x)} \leq g(x)\,,\ \forall x > 1$.

- $f(x) = \int_1^x \frac{g(t)}{t}\, dt = \int_1^x \underbrace{g(t)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{v'}\, dt =$

$= \Big[g(t) \log(t)\Big]_1^x - \int_1^x \underbrace{g'(t)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\log(t)}_{\geq 0,\ t \geq 1}\, dt$

$\leq \Big[g(t) \log(t)\Big]_1^x = g(x) \log(x)$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x) \log(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{\log(x)} \leq g(x)$ //

quando $\log(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

RASCUNHO