Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC e LEFT

1º Sem. 2024/25 05/Fev/2025 - v.1 Duração: 120mn

Número: **Nome:**

1. (1,0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \geq 1 + |x|\}$.

$$|x+2| \geq 1+|x| \iff x+2 \geq 1+|x| \ \vee \ x+2 \leq -1-|x|$$

$$\iff |x| \leq x+1 \ \vee \ |x| \leq -x-3$$

$$\iff (x \leq x+1 \wedge x \geq -x-1) \vee (x \leq -x-3 \wedge x \geq x+3)$$

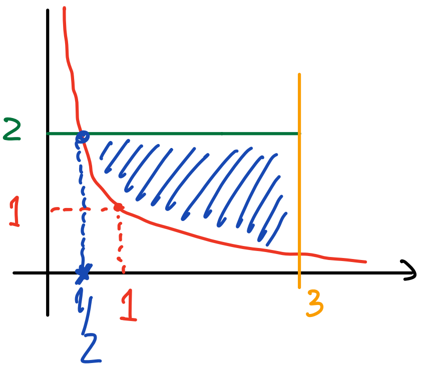
$$\iff (\underbrace{0 \leq 1}_{V} \wedge 2x \geq -1) \vee (2x \leq -3 \wedge \underbrace{0 \geq 3}_{F})$$

$$\iff (x \geq -1/2).$$

Logo, $A = [-1/2, +\infty[$ //.

2. (1,0 val.) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = 2 \quad \text{e} \quad x = 3.$$



$$\text{Área} = \int_{1/2}^{3} \left(2 - (1/x)\right) =$$

$$= 2 \times (3 - 1/2) - [\log x]_{1/2}^{3} =$$

$$= 6 - 1 - \log(3) + \log(1/2) = \underline{\underline{5 - \log(6)}}$$

3. (2,0 val.)

(a) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = 1 - \frac{1}{n!\,2^n}.$$

$\boxed{P(1)}$ $\quad \sum_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = 1 - \frac{1}{1!\,2^1} \iff \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ✓

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Hipótese: $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = 1 - \frac{1}{n!\,2^n}$ p/ um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo

Tese: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}}$ p/ o mesmo $n \in \mathbb{N}$ fixo

Prova: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k!\,2^k} + \frac{2(n+1)-1}{(n+1)!\,2^{n+1}}$

$$\overset{\text{hip.}}{=} 1 - \frac{1}{n!\,2^n} + \frac{2n+1}{(n+1)!\,2^{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{(n+1)\cdot 2 - 2n - 1}{(n+1)!\,2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}} \quad //$$

c.q.d.

(b) Justifique que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k!\,2^k}$$

é convergente e calcule a sua soma.

Pela alínea anterior, temos que a sucessão das somas parciais desta série, $s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)/k!\,2^k$, é dada por $s_n = 1 - \frac{1}{n!\,2^n}$. Como s_n é conv. e $\lim s_n = 1$, concluímos que a série é convergente e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k!\,2^k} = 1$. ✓

4. (2,0 val.) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan(\sin(x))-x}{x^2}, & \text{se } x\neq 0;\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável em $x=0$ com $f'(0)=-1/2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\arctan(\sin(x))-x}{x^2}-0}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(\sin(x))-x}{x^3}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1-\sin^2(x)}{\underbrace{3(1+\sin^2(x))}_{\to 1}x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-1}{x^2}-\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right]=\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right]}_{0/0}-\frac{1}{3}$$

$$\overset{R.C.}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2x}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\,//$$

$\Rightarrow$ f é dif. em 0 e $f'(0)=-1/2\,//$

(b) Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(1)=0$ e $g'(1)=2$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $(f\circ g)$ no ponto de abcissa $x=1$.

- $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=0$
- $(f\circ g)'(1)=f'(g(1))\cdot g'(1)=-\frac{1}{2}\times 2=-1$
- $y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-0=-1(x-1)\Leftrightarrow \boxed{y=-x+1}$

5. (2,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a)\ \frac{1+\arcsin(x)}{\cosh(x^2)}\,; \qquad b)\ \int_{-1/x}^{\sqrt{x}} \log(1+t^2)\ dt\,.$$

a) $$\left(\frac{1+\arcsin(x)}{\cosh(x^2)}\right)' = \frac{(1+\arcsin(x))'\cosh(x^2) - (1+\arcsin(x))(\cosh(x^2))'}{(\cosh(x^2))^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\cosh(x^2) - (1+\arcsin(x))(\sinh(x^2)\cdot 2x)}{(\cosh(x^2))^2}$$

b) $$\left(\int_{-1/x}^{\sqrt{x}} \log(1+t^2)\,dt\right)' = \log\left(1+(\sqrt{x})^2\right)(\sqrt{x})' - \log\left(1+(-1/x)^2\right)\cdot\left(-1/x\right)' =$$

$$= \log(1+x)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\times\left(1/x^2\right) //$$

6. (1,0 val.) Calcule:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{x/3}-1\right)^{2x} = 1^0 = \text{indet.}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\log\left((e^{x/3}-1)^{2x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{2x\log(e^{x/3}-1)} = e^0 = 1 //$$

$\boxed{\text{C.A.}}$ $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(e^{x/3}-1)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{R.C.}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}e^{x/3}/(e^{x/3}-1)}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{3}\frac{x^2}{e^{x/3}-1} = \frac{0}{0} \overset{\text{R.C.}}{=} -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\frac{1}{3}e^{x/3}} = 0 //$$

7. (3,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $(x\log(x))^2$ (c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (sugestão: $t^2=x^2-1$))

(a) $\displaystyle\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + 2\sqrt{1-x^2}$ //

(b) $\displaystyle\int \underbrace{x^2}_{v'}\underbrace{(\log x)^2}_{u} = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v}\underbrace{(\log x)^2}_{u} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{v} \cdot \underbrace{2\log(x)\cdot\frac{1}{x}}_{u'}$

$\displaystyle= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{3}\int x^2\log x =$

$\displaystyle= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\right]$

$\displaystyle= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{9}x^3\log x + \frac{2}{9}\frac{x^3}{3}$ //

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,x\,dx$

$t^2 = x^2-1$

$\Rightarrow 2t\,dt = 2x\,dx$

$\displaystyle= \int \frac{1}{(t^2+1)\,t}\,t\,dt$

$\displaystyle= \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t) =$

$= \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$ //

8. (2,0 val.) Determine a natureza das seguintes séries numéricas e calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{3^{n+1}-1}{7^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{1/2}\sin(n^{-3/2}).$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{n+1}-1}{7^n} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{7}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n$

séries geométricas de razão $|r|<1$, logo <u>conv.</u>

$\displaystyle = 3\frac{1}{1-(-3/7)} - \frac{1}{1-(-1/7)} =$

$\displaystyle = \frac{3}{1+3/7} - \frac{1}{1+1/7} = \frac{3}{10/7} - \frac{1}{8/7} = \frac{21}{10} - \frac{7}{8} = \frac{49}{40}$ //

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim \frac{\sin(n^{-3/2})}{n^{-3/2}} = 1$

$\displaystyle\Rightarrow \lim \frac{n^{1/2}\sin(n^{-3/2})}{n^{1/2}\cdot n^{-3/2}} = 1$

$\displaystyle\Rightarrow \sum n^{1/2}\sin(n^{-3/2}) \sim \sum n^{1/2}\, n^{-3/2} = \sum n^{-1} = \sum\frac{1}{n}$

= Série harmónica, divergente

$\Rightarrow \sum n^{1/2}\sin(n^{-3/2})$ é <u>divergente</u>

9. **(a)** (1,5 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{3^n \sqrt{n+1}} \cdot = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left((x-2)^2\right)^n}{3^n\sqrt{n+1}}$$

• Raio de Conv.: $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{3^{n+1}\sqrt{n+2}}{3^n\sqrt{n+1}} = 3$ //

$\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \underline{\text{abs. conv.}}\quad |(x-2)^2| < 3 \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{3} \Leftrightarrow x \in]2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}[\\ \bullet\ \underline{\text{div.}}\quad |(x-2)^2| > 3 \Leftrightarrow |x-2| > \sqrt{3} \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2-\sqrt{3}[\ \cup\ ]2+\sqrt{3}, +\infty[\end{cases}$ //

• Extremos:

$\boxed{x = 2-\sqrt{3}}$ $\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\sqrt{3})^{2n}}{3^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Como $\lim \frac{1/\sqrt{n+1}}{1/\sqrt{n}} = 1$, temos que $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que é uma série de Dirichlet com expoente $p = \frac{1}{2} \leq 1$, logo divergente.

$\boxed{x = 2+\sqrt{3}}$ $\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{3})^{2n}}{3^n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ que já vimos ser divergente.

(b) (0,5 val.) Denotando por f a função definida por esta série de potências, indique $f^{(17)}(2)$.

A série de potências só tem expoentes pares pelo que $f^{(2n+1)}(2) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, $f^{(17)}(2) = 0$. //

10. (1.0 val.) Desenvolva a função $\int_0^{x^2} \sin(t^2)\,dt$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

- $\left(\int_0^{x^2} \sin(t^2)\,dt\right)' = 2x\sin(x^4) =$

$$= 2x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^4)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{8n+5}}{(2n+1)!},$$

$\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}}}$ = maior intervalo aberto em que a série representa a função

$$\Rightarrow \int_0^{x^2} \sin(t^2)\,dt = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{8n+6}}{(8n+6)(2n+1)!}\right) + K$$

- $x = 0 \Rightarrow \boxed{0 = K}$

11. (1,0 val.) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $h(0) > h(\pi/2) = h(-\pi/2)$. Mostre que a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = h(\arctan x)$ tem máximo absoluto.

- h contínua em $[-\pi/2, \pi/2] \xRightarrow{\text{T. Weierstrass}}$ h tem máx. absoluto em $[-\pi/2, \pi/2]$
- $h(0) > h(\pi/2) = h(-\pi/2) \Rightarrow$ esse máx. absoluto ocorre em $]-\pi/2, \pi/2[$, i.e. $\exists\, a \in]-\pi/2, \pi/2[$ t.q. $h(a) \geq h(y)$, $\forall y \in [-\pi/2, \pi/2]$.
- $\arctan(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[\Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}$ t.q. $\arctan(b) = a$.
- ψ tem máx. absoluto em b porque

$$\psi(b) = h(\arctan(b)) = h(a) \geq h(\underbrace{\arctan x}_{= y \in]-\pi/2, \pi/2[}) = \psi(x), \; \forall x \in \mathbb{R}$$

12. (2,0 val.) Seja $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e considere a função $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt\,, \ \forall x \geq 1\,.$$

(a) Mostre que $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{g(x)}{\log(x)} = f(1)$.

• f contínua $\Rightarrow$ g diferenciável e $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

• $\lim_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{\log(x)} = \dfrac{0}{0} \underset{\text{TFC}}{\overset{\text{RC}}{=}} \lim_{x \to 1} \dfrac{\frac{f(x)}{x}}{1/x} =$

$= \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ //

(b) Mostre que se f for crescente então $\dfrac{g(x)}{\log(x)} \leq f(x)\,, \ \forall x > 1$.

• $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_1^x \underbrace{f(t)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{v'}\, dt =$

$= \Big[f(t) \log(t)\Big]_1^x - \displaystyle\int_1^x \underbrace{f'(t)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\log(t)}_{\geq 0,\ t \geq 1}\, dt$

$\leq \Big[f(t)\log(t)\Big]_1^x = f(x)\log(x)$

$\Rightarrow g(x) \leq f(x)\log(x) \Rightarrow \dfrac{g(x)}{\log(x)} \leq f(x)$ //

quando $\log(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

RASCUNHO