Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC e LEFT

1º Sem. 2024/25   20/Jan/2025 - v.2   Duração: 60mn

Número: **Nome:**

1) (2.0 val.) Calcule, se existir, o seguinte limite:

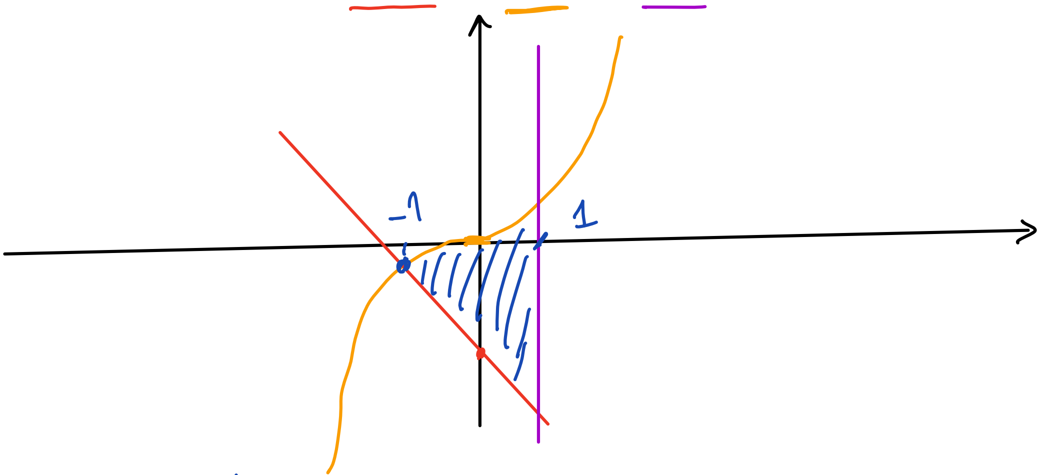
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_1^{e^x-x} \arctan(t^4)dt}{x^2} = \frac{\int_1^1 \arctan(t^4)}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$\underline{\underline{R.C.}} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan\left((e^x-x)^4\right) \cdot (e^x-x)'}{2x}$$

$$= \arctan(1) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} \; //$$

2) (2.0 val.) Esboce e determine a área da região do plano limitada pelas curvas:

$$y = -2x - 3, \quad y = x^3 \quad \text{e} \quad x = 1$$



$$\Rightarrow \quad \text{Área} = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - (-2x-3)\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x^3 + 2x + 3\right] = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\tfrac{1}{4} + 1 + 3\right) - \left(\tfrac{1}{4} + 1 - 3\right) = 3 + 3 = 6 \; //$$

3) (2.0 val.) Calcule
$$\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{3}{(3x+2)\sqrt{3x+1}}dx\,.$$
Sugestão: mudança de variável $t^2 = 3x+1$. , $t \geq 0 \Rightarrow 2t\,dt = 3\,dx$

- $x = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1$
- $x = 2/3 \Rightarrow t^2 = 3 \Rightarrow t = \sqrt{3}$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{3}{(3x+2)\sqrt{3x+1}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\cancel{t}\,dt}{(t^2+1)\,\cancel{t}} =$

$= 2\Big[\arctan(t)\Big]_1^{\sqrt{3}} = 2\big[\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1)\big]$

$= 2\left[\pi/3 - \pi/4\right] = 2\,\pi/12 = \pi/6$ //

4) (2.0 val.) Dada uma função par $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, mostre que
$$\int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{\pi g(1)}{3} - 2\int_0^1 g'(x)\arcsin(x/2)\,dx\,.$$

- g par $\Rightarrow \dfrac{g(x)}{\sqrt{4-x^2}}$ par $\Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2\int_0^1 \underbrace{g(x)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}}_{v'}\,dx$

$= 2\left[\Big[\underbrace{g(x)}_{u} \cdot \underbrace{\arcsin(x/2)}_{v}\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \underbrace{g'(x)}_{u'}\,\underbrace{\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)}_{v}\,dx\right]$

$= 2\,g(1)\,\pi/6 - 2\displaystyle\int_0^1 g'(x)\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)dx$ //

5) **(4.0 val.)** Classifique como convergente ou divergente cada uma das seguintes séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^7}+n}{\sqrt{n^3}+n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5}{4^n+2}$$

• $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^7}+n}{\sqrt{n^3}+n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{7/3}+n}{n^{3/2}+n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{7/3}}{n^3}$$

pelo Critério de Comparação para STNN, pois

$$\lim \frac{n^{7/3}/n^3}{(n^{7/3}+n)/(n^{3/2}+n^3)} = 1 \text{ e } 0<1<+\infty.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{7/3}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-7/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ é divergente (por ser uma série de Dirichlet com expoente $p = 2/3 \leq 1$), concluimos que a série dada também é <u>divergente</u>.

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5}{4^n+2}$. Podemos aplicar o Critério de Razão:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)^5}{4^{n+1}+2}}{\frac{3^n n^5}{4^n+2}} =$$

$$= \lim 3 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \frac{4^n\left(1+\frac{2}{4^n}\right)}{4^{n+1}\left(1+2/4^{n+1}\right)} = \frac{3}{4} < 1$$

$\Rightarrow$ série dada é <u>convergente</u>.

6) (a) **(3.0 val.)** Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{5^n(\sqrt[5]{n}+1)}$$

• Raio de Conv.: $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{5^{n+1}(\sqrt[5]{n+1}+1)}{5^n(\sqrt[5]{n}+1)} = \underline{\underline{5}}$

$\Rightarrow$ • Série $\underline{\text{abs. conv.}}$ qd $|x-5|<5 \Leftrightarrow x \in]0,10[$ //
• Série $\underline{\text{div.}}$ qd $|x-5|>5 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[\cup]10,+\infty[$ //

• Extremos:

$\boxed{x=0}$ $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-5)^n}{5^n(\sqrt[5]{n}+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}+1}$. Como

$\displaystyle\lim \frac{1/\sqrt[5]{n}}{1/(\sqrt[5]{n}+1)} = 1$, temos que $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt[5]{n}+1} \sim \sum \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

que é uma série de Dirichlet com expoente $p = 1/5 \leq 1$, logo divergente.

$\boxed{x=10}$ $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}+1}$, série alternada com parte positiva $\displaystyle\frac{1}{\sqrt[5]{n}+1} \searrow 0 \xrightarrow[\text{Leibniz}]{\text{Crit.}}$ série conv.

Como $\displaystyle\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}+1}\right| = \sum_n \frac{1}{\sqrt[5]{n}+1}$ que já vimos ser divergente, temos que a série de potências é só simplesm/ conv. quando $x = 10$.

(b) **(1.0 val.)** Denotando por f a função definida por esta série de potências, indique $f^{(10)}(5)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{5^n(\sqrt[5]{n}+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(5)}{5!}(x-5)^n$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(10)}(5)}{10!} = \frac{(-1)^{10}}{5^{10}(\sqrt[5]{10}+1)} \Rightarrow f^{(10)}(5) = \frac{10!}{5^{10}(\sqrt[5]{10}+1)} \;//$$

7) (2.0 val.) Desenvolva a função $\log(5+x)$ em série de potências de $(x+2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

$$\bullet\ (\log(5+x))' = \frac{1}{5+x} = \frac{1}{3+(x+2)} = \frac{1/3}{1-\left(-\frac{x+2}{3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x+2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{3^{n+1}}$$

$$\text{qd } \left|\frac{x+2}{3}\right| < 1 \iff |x+2| < 3 \iff x \in \,]-5,1[$$

$$\Rightarrow \log(5+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^{n+1}}{(n+1)\, 3^{n+1}} + k$$

$\bullet\ x=-2 \Rightarrow \log(3) = k$ e portanto

$$\log(5+x) = \log(3) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{(x+2)^n}{3^n}, \quad x \in \,]-5,1[$$

8) (2.0 val.) Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_0^1 gh = 0$ para qualquer função contínua $h : [0,1] \to \mathbb{R}$. Mostre que então $g(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

Suponhamos que $\exists\, c \in [0,1] : g(c) \neq 0$.
Podemos supor sem perda de generalidade que $g(c) > 0$. Como g é contínua em c, existe um intervalo V_ε, com $c \in V_\varepsilon \subset [0,1]$, de comprimento positivo $\varepsilon > 0$, t.q. $g(x) > \frac{g(c)}{2} > 0$, $\forall x \in V_\varepsilon \subset [0,1]$.

Tomando então $h = g$ temos que

$$\int_0^1 g\cdot h = \int_0^1 g^2 \geq \int_{V_\varepsilon} g^2 > \varepsilon \frac{g(c)^2}{4} > 0$$

absurdo.

Logo temos de facto que $g(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

RASCUNHO