Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC e LEFT

1º Sem. 2024/25 20/Jan/2025 - v.1 Duração: 60mn

Número: **Nome:**

1) (2.0 val.) Calcule, se existir, o seguinte limite:

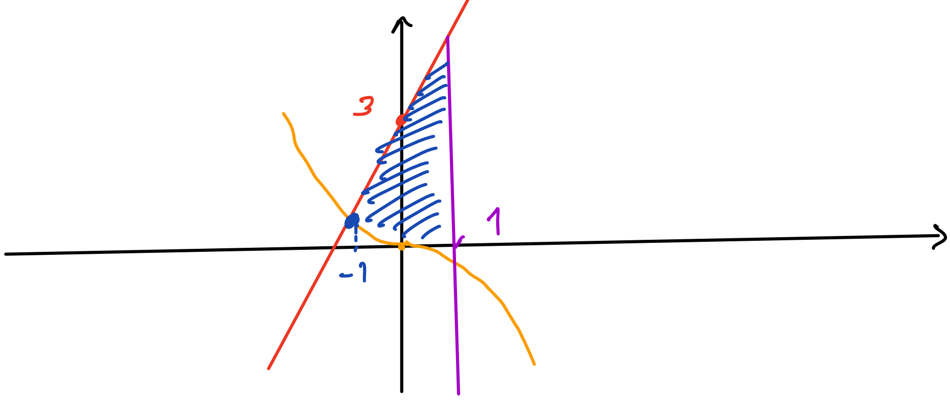
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_1^{e^x - x} \arctan(t^6)dt}{x^2} = \frac{\int_1^1 \arctan(t^6)}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\arctan((e^x - x)^6)\,(e^x - x)'}{2x}$$

$$= \arctan(1) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} //$$

2) (2.0 val.) Esboce e determine a área da região do plano limitada pelas curvas:

$$y = 2x + 3, \quad y = -x^3 \quad \text{e} \quad x = 1$$



$$\Rightarrow \text{Área} = \int_{-1}^{1} [(2x+3) - (-x^3)]\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} [2x + 3 + x^3] = \left[x^2 + 3x + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[1 + 3 + \tfrac{1}{4}\right] - \left[1 - 3 + \tfrac{1}{4}\right] = 3 + 3 = 6 //$$

3) (2.0 val.) Calcule
$$\int_{-\frac{2}{9}}^{0} \frac{3}{(3x+2)\sqrt{3x+1}}dx\,.$$
Sugestão: mudança de variável $t^2 = 3x+1$, $t \geq 0 \Rightarrow 2t\,dt = 3\,dx$

- $x = -2/9 \Rightarrow t^2 = 1/3 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

  $x = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1$

- $$\int_{-2/9}^{0} \frac{3}{(3x+2)\sqrt{3x+1}}\,dx = \int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{2\cancel{t}\,dt}{(t^2+1)\,\cancel{t}} =$$

$$= 2\left[\arctan(t)\right]_{\sqrt{3}/3}^{1} = 2\left(\arctan(1) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4} - \pi/6\right) = 2\,\pi/12 = \pi/6 \;//$$

4) (2.0 val.) Dada uma função par $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, mostre que
$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{\pi f(1)}{3} - 2\int_{0}^{1} f'(x)\arcsin(x/2)\,dx\,.$$

- f par $\Rightarrow \dfrac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}$ par $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2\int_{0}^{1} \underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}}_{v'}\,dx$$

$$= 2\left[\left[\underbrace{f(x)}_{u} \cdot \underbrace{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}_{v}\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \underbrace{f'(x)}_{u'}\,\underbrace{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}_{v}\,dx\right]$$

$$= 2\,f(1)\,\pi/6 - 2\int_{0}^{1} f'(x)\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)dx \;//$$

5) **(4.0 val.)** Classifique como convergente ou divergente cada uma das seguintes séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5}+n}{\sqrt{n^3}+n^3} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n^3}{5^n+2}$$

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5}+n}{\sqrt{n^3}+n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5/3}+n}{n^{3/2}+n^3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5/3}}{n^3}$

pelo Critério de Comparação para STNN, pois $\displaystyle\lim \frac{(n^{5/3}+n)/(n^{3/2}+n^3)}{n^{5/3}/n^3} = 1$ e $0<1<+\infty$.

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5/3}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-5/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ é convergente (por ser uma Série de Dirichlet com expoente $p = 4/3 > 1$), concluímos que a série dada também é <u>convergente</u>.

• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n^3}{5^n+2}$. Podemos aplicar o Critério da Razão: $\displaystyle\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{4^{n+1}(n+1)^3}{5^{n+1}+2}}{\dfrac{4^n\, n^3}{5^n+2}} =$

$\displaystyle= \lim 4 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{5^n(1+2/5^n)}{5^{n+1}(1+2/5^{n+1})} = 4/5 < 1$

$\Rightarrow$ série dada é <u>convergente</u>.

6) (a) **(3.0 val.)** Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{3^n(\sqrt[3]{n}+1)}$$

• Raio de Conv.: $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{3^{n+1}(\sqrt[3]{n+1}+1)}{3^n(\sqrt[3]{n}+1)} = 3$ //

$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Série } \underline{\text{abs. conv.}} \text{ qd } |x-3|<3 \Leftrightarrow x \in]0,6[\text{ //} \\ \bullet \text{ Série } \underline{\text{div.}} \text{ qd } |x-3|>3 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[\cup]6,+\infty[\text{ //} \end{cases}$

• Extremos:

$\boxed{x=0} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-3)^n}{3^n(\sqrt[3]{n}+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}+1}$. Como

$\lim \frac{1/\sqrt[3]{n}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}+1}} = 1$, temos que $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}+1} \sim \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

que é uma série de Dirichlet com expoente $p = 1/3 \leq 1$, logo divergente.

$\boxed{x=6} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+1}$ série alternada com

parte positiva $\frac{1}{\sqrt[3]{n}+1} \searrow 0 \xRightarrow[\text{Leibniz}]{\text{Crit.}}$ série conv.

Como $\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+1}\right| = \sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{n}+1}$ que já vimos ser divergente, temos que a série de potências é só simplesm/ conv. quando $x=6$.

(b) **(1.0 val.)** Denotando por f a função definida por esta série de potências, indique $f^{(20)}(3)$.

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{3^n(\sqrt[3]{n}+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n$

$\Rightarrow \frac{f^{(20)}(3)}{20!} = \frac{(-1)^{20}}{3^{20}(\sqrt[3]{20}+1)} \Rightarrow f^{(20)}(3) = \frac{20!}{3^{20}(\sqrt[3]{20}+1)}$ //

7) (2.0 val.) Desenvolva a função $\log(5+x)$ em série de potências de $(x+3)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

$$\cdot \left(\log(5+x)\right)' = \frac{1}{5+x} = \frac{1}{2+(x+3)} = \frac{1/2}{1-\left(-\frac{x+3}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x+3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{2^{n+1}}$$

qd $\left|\frac{x+3}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |x+3|<2 \Leftrightarrow x\in\,]-5,-1[$

$$\Rightarrow \log(5+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + K$$

$\cdot\ x=-3 \Rightarrow \log(2)=K$ e portanto

$$\log(5+x) = \log(2) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+3)^n}{n\,2^n}, \quad x\in\,]-5,-1[$$

8) (2.0 val.) Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_0^1 fg = 0$ para qualquer função contínua $g:[0,1]\to\mathbb{R}$. Mostre que então $f(x)=0\,,\ \forall x\in[0,1]$.

Suponhemos que $\exists\, c\in[0,1] : f(c)\neq 0$.
Podemos supor sem perda de generalidade que $f(c)>0$. Como f é contínua em c, existe um intervalo V_ε, com $c\in V_\varepsilon\subset[0,1]$, de comprimento positivo $\varepsilon>0$, t.q. $f(x)>\frac{f(c)}{2}>0$, $\forall x\in V_\varepsilon\subset[0,1]$.

Tomando então $g=f$ temos que

$$\int_0^1 f\cdot g = \int_0^1 f^2 \geq \int_{V_\varepsilon} f^2 > \varepsilon\,\frac{f^2(c)}{4} > 0$$

absurdo.

Logo temos de facto que $f(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$.

RASCUNHO