2º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC E LEFT

1º Sem. 2024/25 06/Dez/2024 - LMAC e LEFT - v.2 Duração: 45mn

Número: **Nome:**

1) (2.0 val.) A função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arccos(x^2) - \frac{\pi}{2} & , -1 \leq x \leq 0\,, \\ \sin(e^{2x} - 1) & , x > 0\,, \end{cases}$$

é diferenciável em zero? Justifique. f é contínua em zero porque

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \arccos(0) - \pi/2 = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} \sin(e^{2x}-1).$$

Então, pelo Cor. do Teor. de Lagrange:

$$(i)\quad f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0$$

$$(ii)\quad f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2e^{2x}\cos(e^{2x}-1) = 2$$

Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$ concluimos que f não é diferenciável em zero.

2) (2.0 val.) Calcule $\lim_{x\to 0} (1 - \sinh(x))^{\frac{1}{\arctan(x)}}$. $= 1^\infty =$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\log\left[(1-\sinh(x))^{1/\arctan(x)}\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log[(1-\sinh(x))]}{\arctan(x)}} = e^{-1}$$

$\boxed{C.A.}$ $$\lim_{x\to 0} \frac{\log[(1-\sinh(x))]}{\arctan(x)} = \frac{0}{0} =$$

$$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\cosh(x)}{1-\sinh(x)}}{\frac{1}{1+x^2}} = -1$$

3) (2.0 val.) Calcule: $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(\pi x)}{e^{x/2}-e}$. $= \frac{0}{0} =$

$$\overset{RC}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\pi \cos(\pi x)}{\frac{1}{2} e^{x/2}} = \frac{2\pi}{e} \,//$$

4) (2.0 val.) Determine uma função $f :]-2,2[\to \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{e} \quad f(0) = -1\,.$$

- $f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -\sqrt{4-x^2} + C$
- $f(0) = -1 \Rightarrow -2 + C = -1 \Rightarrow C = 1$

Logo: $f(x) = -\sqrt{4-x^2} + 1$

5) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $\cos(x)\arctan(\sin x)$.

$$\int \underbrace{\cos(x)}_{u'} \underbrace{\arctan(\sin x)}_{v} =$$

$$= \underbrace{\text{sen}(x)}_{u} \cdot \underbrace{\arctan(\text{sen}(x))}_{v} - \int \underbrace{\text{sen}(x)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{\cos(x)}{1+(\text{sen}(x))^2}}_{v'}$$

$$= \text{sen}(x) \cdot \arctan(\text{sen}(x)) - \frac{1}{2}\int \frac{2\,\text{sen}(x)\cos(x)}{1+(\text{sen}(x))^2} =$$

$$= \text{sen}(x)\arctan(\text{sen}(x)) - \frac{1}{2}\log(1+\text{sen}^2(x)) \,//$$

6) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $\dfrac{x^2-4x-4}{(4+x^2)(x+2)}$.

$$\int \frac{x^2-4x-4}{(4+x^2)(x+2)} = \int \left(\frac{Ax+B}{4+x^2} + \frac{C}{x+2} \right) = (*)$$

$$\left[\begin{array}{l} \boxed{C.A.} \quad (Ax+B)(x+2)+C(4+x^2) = x^2-4x-4 \\ x=-2 \Rightarrow 8C = 4+8-4 \Rightarrow \boxed{C=1} \\ x=0 \Rightarrow 2B+4=-4 \Rightarrow \boxed{B=-4} \\ x=1 \Rightarrow 3(A-4)+5=-7 \Rightarrow 3A=0 \Rightarrow \boxed{A=0} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (*) = \int \frac{-4}{4+x^2} + \int \frac{1}{x+2} = -\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \log|x+2|$$

$$= -2\arctan\left(x/2\right) + \log|x+2|$$

7) (2.0 val.) Usando a substituição $x = t^3$ determine uma primitiva de $\dfrac{1}{4x+3\sqrt[3]{x}}$.

$$\Rightarrow dx = 3t^2\,dt \quad e \quad t = x^{1/3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{4x+3x^{1/3}}\,dx = \int \frac{1}{4t^3+3t}\cdot 3t^2\,dt =$$

$$= \int \frac{3t}{4t^2+3} = \frac{3}{8}\log(4t^2+3) = \frac{3}{8}\log\left(4x^{2/3}+3\right)$$

8) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função 3 vezes diferenciável tal que o seu polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto $a=1$ é dado por

$$p_{2,1}(x) = 3-2(x-1)^2\,.$$

(a) **(1.0 val.)** Decida se f tem ou não um extremo local em 1, classificando-o em caso afirmativo.

$p_{2,1}(x) = 3-2(x-1)^2 \Rightarrow f(1)=3,\ f'(1)=0$ e $f''(1)=-4<0$

$\Rightarrow f$ tem um máximo local em 1. $(\cap)$

(b) **(2.0 val.)** Suponha que $|f^{(3)}(x)|\le \frac{1}{x}$ para qualquer $x>0$. Mostre que então f pode ser aproximada por $p_{2,1}$ no intervalo $[\frac12,\frac32]$ com erro inferior a $0,05$.

- $|f^{(3)}(x)| \le 1/x \Rightarrow |f^{(3)}(x)| \le \frac{1}{1/2} = 2$, $\forall x \in [1/2, 3/2]$

- $|f(x)-p_{2,1}(x)| = \left|\frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}(x-1)^3\right| \le \frac{2}{3!}\times \frac18 =$

$= \frac{1}{24} < \frac{1}{20} = 0.05$, $\forall x,\theta \in [1/2, 3/2]$.

9) **(3.0 val.)** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(n)=1$ e $f(n+\frac1n)=0$ para qualquer $n\in\mathbb{N}$. Mostre que $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ não existe em $\overline{\mathbb{R}}$.

- Teor. de Lagrange no intervalo $[n, n+1/n] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c_n \in]n, n+1/n[$ t.q. $f'(c_n) = \frac{f(n+1/n)-f(n)}{n+1/n-n} = \frac{0-1}{1/n} =$

$= -n \Rightarrow \exists c_n \to +\infty$ t.q. $f'(c_n) \to -\infty$ (1)

- Teor. de Lagrange no intervalo $[n+1/n, n+1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists d_n \in]n+1/n, n+1[$ t.q. $f'(d_n) = \frac{f(n+1)-f(n+1/n)}{n+1-(n+1/n)} =$

$= \frac{1-0}{1-1/n} = \frac{1}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1}$

$\Rightarrow \exists d_n \to +\infty$ t.q. $f'(d_n) \to 1$ (2)

- (1)+(2) $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x)$ não existe em $\overline{\mathbb{R}}$.