Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC E LEFT

1º Sem. 2024/25 06/Dez/2024 - LMAC e LEFT - v.1 Duração: 45mn

Número: **Nome:**

1) (2.0 val.) A função $f :]-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(e^{2x} - 1) & , \ x < 0\,, \\ \frac{\pi}{2} - \arccos(x^2) & , \ 0 \leq x \leq 1\,, \end{cases}$$

é diferenciável em zero? Justifique. f é contínua em zero porque

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(0) = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^-} \sin(e^{2x}-1).$$

Então, pelo Cor. do Teor. de Lagrange:

(i) $f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2e^{2x}\cos(e^{2x}-1) = 2$

(ii) $f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 0$

Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$ concluímos que f não é diferenciável em zero.

2) (2.0 val.) Calcule $\lim_{x\to 0} (2\cosh(x) - 1)^{\frac{1}{\arctan(x)}}$. $= 1^\infty =$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\log\left[(2\cosh(x)-1)^{1/\arctan(x)}\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log[2\cosh(x)-1]}{\arctan(x)}} = e^0 = 1$$

$\boxed{\text{C.A.}}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log[2\cosh(x)-1]}{\arctan(x)} = \dfrac{0}{0} =$

$$\overset{\text{R.C.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\sinh(x)}{2\cosh(x)-1}}{\frac{1}{1+x^2}} = 0$$

3) (2.0 val.) Calcule: $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x/2} - e}{\sin(\pi x)}$. $= \frac{0}{0} =$

$$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2}\, e^{x/2}}{\pi \cos(\pi x)} = \frac{e}{2\pi} \,//$$

4) (2.0 val.) Determine uma função $f :]-2, 2[\to \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \quad \text{e} \quad f(0) = 1\,.$$

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -\sqrt{4-x^2} + C$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow -2 + C = 1 \Rightarrow C = 3$$

Logo: $f(x) = -\sqrt{4-x^2} + 3 \,//$

5) (2.0 val.) Determine uma primitiva de $\sin(x)\arctan(\cos x)$.

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan(\cos x)}_{v} = \underbrace{-\cos(x)}_{u} \cdot \underbrace{\arctan(\cos x)}_{v} -$$

$$- \int \underbrace{(-\cos(x))}_{u} \underbrace{\left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{1 + \cos^2(x)}\right)}_{v'} =$$

$$= -\cos(x) \cdot \arctan(\cos x) + \frac{1}{2} \int \frac{-2(\cos x)(\operatorname{sen} x)}{1 + \cos^2(x)}$$

$$= -\cos(x) \cdot \arctan(\cos x) + \frac{1}{2} \log(1 + \cos^2(x)) \,//$$

6) **(2.0 val.)** Determine uma primitiva de $\dfrac{4+4x-x^2}{(4+x^2)(x+2)}$.

$$\int \frac{4+4x-x^2}{(4+x^2)(x+2)} = \int \left(\frac{Ax+B}{4+x^2} + \frac{C}{x+2} \right) = (*)$$

$\boxed{C.A.}$ $(Ax+B)(x+2) + C(4+x^2) = 4+4x-x^2$

$x=-2 \Rightarrow 8C = 4-8-4 \Rightarrow \boxed{C=-1}$

$x=0 \Rightarrow 2B-4=4 \Rightarrow \boxed{B=4}$

$x=1 \Rightarrow 3(A+4)-5 = 7 \Rightarrow 3A = 0 \Rightarrow \boxed{A=0}$

$$\Rightarrow (*) = \int \frac{4}{4+x^2} - \int \frac{1}{x+2} = \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} - \log|x+2|$$

$$= 2\arctan\left(x/2\right) - \log|x+2|$$

7) **(2.0 val.)** Usando a substituição $x = t^3$ determine uma primitiva de $\dfrac{1}{4\sqrt[3]{x}+3x}$.

$\Rightarrow dx = 3t^2\,dt$ e $t = x^{1/3}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{4\sqrt[3]{x}+3x}\,dx = \int \frac{1}{4t+3t^3} \cdot 3t^2\,dt =$$

$$= \int \frac{3t}{4+3t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{6t}{4+3t^2} = \frac{1}{2}\log(4+3t^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(4+3x^{2/3}\right)$$

8) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 3 vezes diferenciável tal que o seu polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto $a = 1$ é dado por

$$p_{2,1}(x) = 4 + 3(x-1)^2 .$$

(a) **(1.0 val.)** Decida se f tem ou não um extremo local em 1, classificando-o em caso afirmativo.

$p_{2,1}(x) = 4 + 3(x-1)^2 \Rightarrow f(1) = 4$, $f'(1) = 0$ e $f''(1) = 6 > 0$
$(\cup)$

$\Rightarrow f$ tem um mínimo local em 1.

(b) **(2.0 val.)** Suponha que $|f^{(3)}(x)| \leq \frac{1}{x}$ para qualquer $x > 0$. Mostre que então f pode ser aproximada por $p_{2,1}$ no intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ com erro inferior a $0,05$.

- $|f^{(3)}(x)| \leq 1/x \Rightarrow |f^{(3)}(x)| \leq \frac{1}{1/2} = 2$, $\forall x \in [1/2, 3/2]$

- $|f(x) - p_{2,1}(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!} (x-1)^3 \right| \leq \frac{2}{3!} \times 1/8 =$

$= \frac{1}{24} < \frac{1}{20} = 0.05$, $\forall x, \theta \in [1/2, 3/2]$.

9) **(3.0 val.)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(n) = 0$ e $f(n + \frac{1}{n}) = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ não existe em $\overline{\mathbb{R}}$.

- Teor. de Lagrange no intervalo $[n, n+1/n] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c_n \in]n, n+1/n[$ t.q. $f'(c_n) = \frac{f(n+1/n) - f(n)}{n + 1/n - n} = \frac{1-0}{1/n} =$

$= n \Rightarrow \exists c_n \to +\infty$ t.q. $f'(c_n) \to +\infty$ (1)

- Teor. de Lagrange no intervalo $[n+1/n, n+1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists d_n \in]n+1/n, n+1[$ t.q. $f'(d_n) = \frac{f(n+1) - f(n+1/n)}{n+1-(n+1/n)} =$

$= \frac{0-1}{1 - 1/n} = \frac{-1}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{1-n}$

$\Rightarrow \exists d_n \to +\infty$ t.q. $f'(d_n) \to -1$ (2)

- (1)+(2) $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f'(x)$ não existe em $\overline{\mathbb{R}}$.