Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC e LEFT

1º Sem. 2024/25 18/Out/2024 - LMAC e LEFT - v.2 Duração: 45mn

Número: **Nome:** **Curso:**

1) (1.0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |2x - 5| < 1\}$.

$|2x-5|<1 \Leftrightarrow -1 < 2x-5 < 1 \Leftrightarrow 4 < 2x < 6$

$\Leftrightarrow 2 < x < 3.$ Logo $A =]2,3[$. //

2) (3.0 val.) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x\sin(e^{-x})}{x^2+1} = 0$ por enquadramento:

$$-\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{1+1/x^2} = \frac{-|x|}{x^2+1} \le \frac{x\sin(e^{-x})}{x^2+1} \le \frac{|x|}{x^2+1} = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{1+1/x^2}$$

$x\to-\infty$ $\searrow$ 0 $\Longrightarrow$ $x\to-\infty$ $\downarrow$ 0 $\Longleftarrow$ 0 $\swarrow$ $x\to-\infty$

$= \quad 0 \quad =$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x+e^{-x})/2 - 1}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}\,\frac{(1+e^{-2x}-2e^{-x})}{(1-e^{-2x})} = \frac{1}{1} = 1$$ //

3) (2.0 val.) Calcule $f'(x)$, sempre que exista:

(a) $f'(x) = \left(\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2(1/x)}\cdot\left(1/x\right)' = \frac{1}{\cos^2(1/x)}\cdot\left(-1/x^2\right)$ //

(b) $f'(x) = \left(\frac{\sinh(x^2)}{\sqrt{e^x+1}}\right)' = \dfrac{\cosh(x^2)\cdot 2x\cdot\sqrt{e^x+1} - \sinh(x^2)\,\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}}{e^x+1}$ //

4) (4.0 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{1}{4}\left((-1)^n(2n+1)-1\right) .$$

$\boxed{P(1)}$ $\quad \sum_{k=1}^{1}(-1)^k k = \frac{1}{4}\left((-1)^1(2+1)-1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; -1 = \frac{1}{4}(-3-1) \Leftrightarrow -1=-1$ ✓

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Hip.: $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{1}{4}\left((-1)^n(2n+1)-1\right)$, para um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Tese: $\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k = \frac{1}{4}\left((-1)^{n+1}(2n+3)-1\right)$, para o mesmo det. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Prova:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1) =$$

$$\overset{\text{hip.}}{=} \frac{1}{4}\left((-1)^n(2n+1)-1\right) + (-1)^{n+1}(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}\left((-1)^{n+1}(-2n-1+4n+4)-1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left((-1)^{n+1}(2n+3)-1\right) \;//$$

c.q.d.

5) (6.0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo o $\mathbb{R}$ e dada por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) - \frac{\pi}{4} & , \ x > 1\,; \\ a - x^2 & , \ -1 \leq x \leq 1\,; \\ \arctan(x) + b & , \ x < -1\,; \end{cases}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes.

(a) Determine o valor das constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

- $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Leftrightarrow a - 1 = \arctan(1) - \pi/4 = \pi/4 - \pi/4 = 0$

  $\Leftrightarrow \boxed{a = 1}$

- $f(-1) = \lim_{x \to -1^-} f(x) \Leftrightarrow a - 1 = \arctan(-1) + b = -\pi/4 + b$

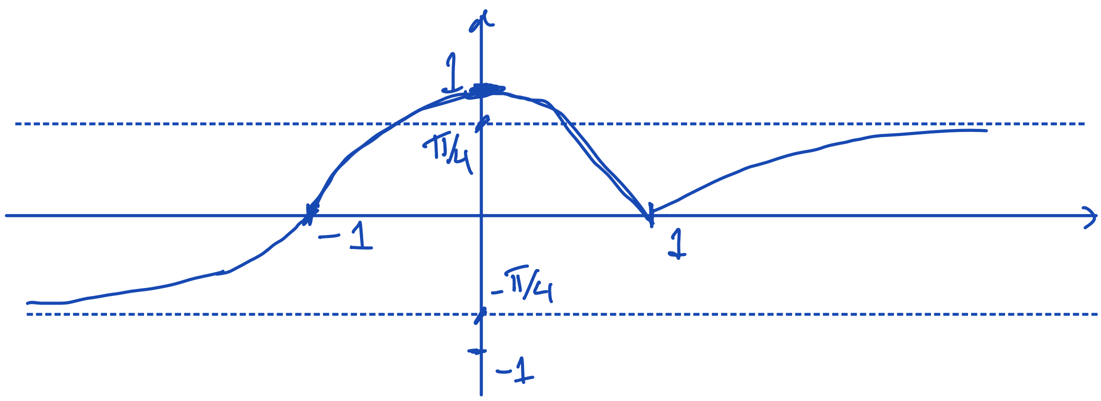
  $\underset{a=1}{\Leftrightarrow} 0 = b - \pi/4 \Leftrightarrow \boxed{b = \pi/4}$

(b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) + \pi/4 = -\pi/2 + \pi/4 = -\pi/4$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) - \pi/4 = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$

(c) Esboce o gráfico de f e determine o seu contradomínio.



$f(\mathbb{R}) = \left]-\pi/4, 1\right]$

6) (1.0 val.) A tabela seguinte indica alguns dos valores de uma função diferenciável $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da sua derivada $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$g(g(5)) = g(3) = \underline{\underline{1}}$

x	1	3	5
$g(x)$	5	1	3
$g'(x)$	-2	1	2

$(g \circ g)'(5) = g'(g(5)) \cdot g'(5)$
$= g'(3) \cdot g'(5) = 1 \cdot 2 = 2 //$

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $(g \circ g)(x)$ em $x = \underline{\underline{5}}$.

$$y - 1 = 2(x - 5) //$$

7) (3.0 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e <u>positiva</u>, tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x) .$$

(a) Prove que f não tem mínimo.

Suponhamos por absurdo que f tem mínimo,
i.e. $\exists\, b \in \mathbb{R} : f(b) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Como f é <u>positiva</u>, temos que

$f(x) \geq f(b) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \geq f(b) > 0$ $\cancel{//}$ pq $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

(b) Prove que f tem máximo.

- $\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ e } f(0) > 0 \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, L > 0 : |x| > L \Rightarrow f(x) < f(0)$

- T. Weierstrass $\Rightarrow f$ tem máximo em $[-L, L]$,

i.e. $\exists\, c \in [-L, L] : f(c) \geq f(x), \forall x \in [-L, L]$. (1)

- Em particular, $f(c) \geq f(0)$ e portanto

$f(c) \geq f(0) > f(x), \forall x \in]-\infty, -L[\cup]L, +\infty[$. (2)

- (1) + (2) $\Rightarrow f$ tem máximo em $c //$.