Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC e LEFT

1º Sem. 2024/25 18/Out/2024 - LMAC e LEFT - v.1 Duração: 45mn

Número: **Nome:** **Curso:**

1) (1.0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \ |2x-3| < 1\}$.

$|2x-3|<1 \iff -1 < 2x-3 < 1 \iff 2 < 2x < 4$

$\iff 1 < x < 2$. Logo $A =]1,2[$.//

2) (3.0 val.) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\cos(e^{-x})}{x^2+1}$ $= 0$ por enquadramento:

$$-\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{1+1/x^2} = \frac{-|x|}{x^2+1} \leq \frac{x\cos(e^{-x})}{x^2+1} \leq \frac{|x|}{x^2+1} = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{1+1/x^2}$$

$x\to-\infty$ $\Longrightarrow$ $x\to-\infty$ $\Longleftarrow$ $x\to-\infty$

$0 = 0 = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)-1}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x-e^{-x})/2}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}\,\frac{(1-e^{-2x})}{(1+e^{-2x}-2e^{-x})}$$

$= 1/1 = 1$//

3) (2.0 val.) Calcule $f'(x)$, sempre que exista:

(a) $f'(x) = \left[\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]' = \dfrac{1}{\cos^2(1/x)}\cdot\left(1/x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2(1/x)}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$//

(b) $f'(x) = \left[\dfrac{\cosh(e^x)}{\sqrt{x^2+1}}\right]' = \dfrac{\operatorname{senh}(e^x)\cdot e^x\cdot\sqrt{x^2+1} - \cosh(e^x)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$//

4) (4.0 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k = \frac{1}{4}\left(1-(-1)^n(2n+1)\right) .$$

$\boxed{P(1)}$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k-1}k = \frac{1}{4}\left(1-(-1)^1(2+1)\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (-1)^0 \cdot 1 = \frac{1}{4}(1+3) \Leftrightarrow 1 = 1$ ✓

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Hipótese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k = \frac{1}{4}\left(1-(-1)^n(2n+1)\right)$, para um def. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Tese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}k = \frac{1}{4}\left(1-(-1)^{n+1}(2n+3)\right)$, para o mesmo def. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Prova: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot k + (-1)^n(n+1) =$

$$\overset{\text{hip.}}{=} \frac{1}{4}\left(1-(-1)^n(2n+1)\right) + (-1)^n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-(-1)^n(2n+1-4n-4)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-(-1)^n(-2n-3)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-(-1)^{n+1}(2n+3)\right) \quad //$$

c.q.d.

5) (6.0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo o $\mathbb{R}$ e dada por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \frac{\pi}{4} & , \ x < -1\,; \\ x^2 - a & , \ -1 \le x \le 1\,; \\ \arctan(x) + b & , \ x > 1\,; \end{cases}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes.

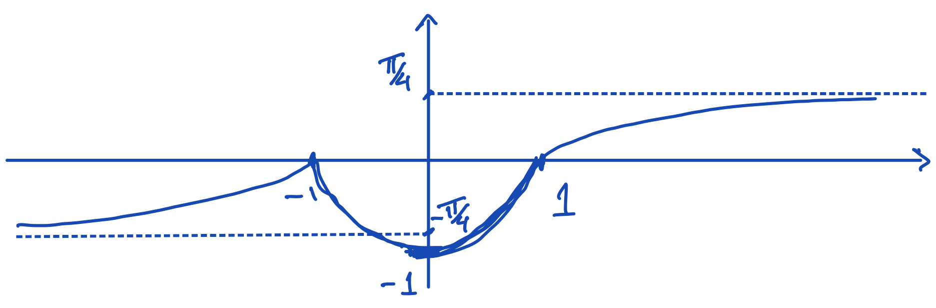
(a) Determine o valor das constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

- $f(-1) = \lim_{x \to -1^-} f(x) \iff 1 - a = \arctan(-1) + \pi/4 = -\pi/4 + \pi/4 = 0$
  $\iff \boxed{a = 1}$
- $f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \iff 1 - a = \arctan(1) + b = \pi/4 + b$
  $\underset{a=1}{\iff} 0 = \pi/4 + b \iff \boxed{b = -\pi/4}$

(b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\arctan(x) + \pi/4\right) = -\pi/2 + \pi/4 = -\pi/4$ //
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\arctan(x) - \pi/4\right) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$ //

(c) Esboce o gráfico de f e determine o seu contradomínio.



$f(\mathbb{R}) = [-1, \pi/4[$ //

6) (1.0 val.) A tabela seguinte indica alguns dos valores de uma função diferenciável $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e da sua derivada $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$(g \circ g)'(3) = g'(g(3)) \cdot g'(3) =$

$g(g(3)) = g(1) = \underline{\underline{5}}$

x	1	3	5
$g(x)$	5	1	3
$g'(x)$	-2	1	2

$= g'(1) \cdot g'(3) = (-2) \cdot 1 = \underline{\underline{-2}}$

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $(g \circ g)(x)$ em $x = \underline{\underline{3}}$.

$$y - 5 = (-2)(x - 3) \quad //$$

7) (3.0 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x) \,.$$

(a) Prove que f tem máximo.

- $\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ e } f(0) > 0 \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists_{L > 0} : |x| > L \Rightarrow f(x) < f(0)$

- T. Weierstrass $\Rightarrow$ f tem máximo em $[-L, L]$,

i.e. $\exists\, c \in [-L, L] : f(c) \geq f(x), \ \forall x \in [-L, L]$. (1)

- Em particular $f(c) \geq f(0)$ e portanto

$f(c) \geq f(0) > f(x), \ \forall x \in]-\infty, -L[\cup]L, +\infty[$. (2)

- (1) + (2) $\Rightarrow$ f tem máximo em $\mathbb{R}$. //

(b) Prove que f não tem mínimo.

Suponhamos por absurdo que f tem mínimo,

i.e. $\exists\, b \in \mathbb{R} : f(b) \leq f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Como f é positiva, temos que

$f(x) \geq f(b) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \geq f(b) > 0$ ✗ pq $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Logo f não tem mínimo. //