Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º Sem. 2022/23 23/Jan/2023 - LMAC - v.2 Duração: 60mn

Número: **Nome:**

1) Calcule a derivada da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \int_{-1/x}^{x} \arctan(t^2)\, dt$.

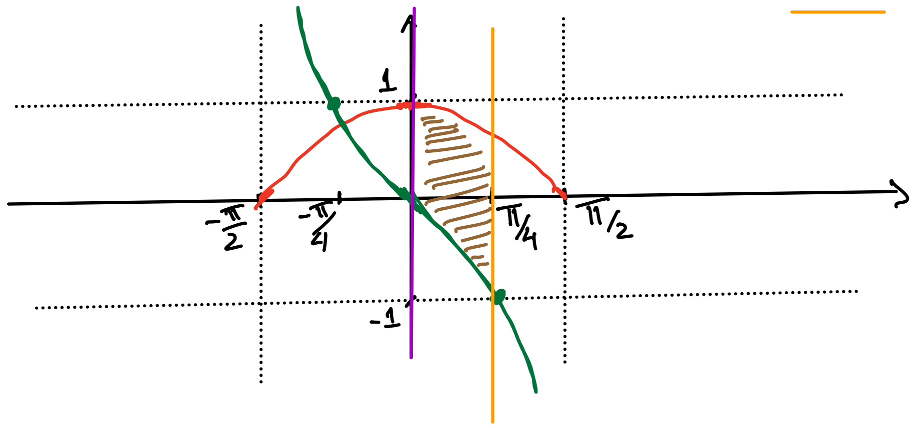
$$f'(x) = \left(\int_{-1/x}^{x} \arctan(t^2)\, dt \right)' = \arctan(x^2) \cdot (x)' -$$

$$- \arctan\left(\left(-\tfrac{1}{x}\right)^2 \right) \cdot \left(-\tfrac{1}{x}\right)'$$

$$= \arctan(x^2) - \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \quad //$$

2) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \cos(x)\,, \quad y = -\tan(x)\,, \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{4}\,.$$



$$\Rightarrow \text{Área}(D) = \int_0^{\pi/4} \left[\cos(x) - (-\tan(x)) \right] dx$$

$$= \Big[\operatorname{sen}(x) - \log(\cos(x)) \Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\operatorname{sen}(\pi/4) - \log(\cos(\pi/4)) \right) - 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \log(\sqrt{2}) \quad //$$

3) Justifique que a seguinte série é convergente e calcule a sua soma: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-(-1)^{n+1}}{3^n}$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-(-1)^{n+1}}{3^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

séries geométricas de razão $|r=\frac{1}{3}|<1$ e $|r=-\frac{1}{3}|<1$, logo convergentes.

- $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1+1/3} = \frac{3}{4}$

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2-(-1)^{n+1}}{3^n} = 2\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{4} = 15/4$ //

4) Determine a natureza da seguinte série: $\sum \frac{n\,3^n}{2^{2n}+1}$. $= \sum \frac{n\,3^n}{4^n+1}$

- Critério da razão:

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)\,3^{n+1}}{4^{n+1}+1}}{\frac{n\,3^n}{4^n+1}} =$

$= \lim 3 \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{4^n+1}{4(4^n+1/4)}}_{\to 1} = 3/4 < 1$

$\Rightarrow$ série é convergente //

5) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum \frac{(2x-3)^n}{2^n(\sqrt{n}+1)} = \sum \frac{(x-3/2)^n}{\sqrt{n}+1}$$

- Raio de convergência:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left(\frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n}+1} \right) = 1,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ série abs. conv. qd } |x-3/2|<1 \Leftrightarrow \\ \quad \Leftrightarrow x \in \left]\frac{3}{2}-1, \frac{3}{2}+1\right[= \left]\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right[\\ \bullet \text{ Série divergente qd } |x-3/2|>1 \Leftrightarrow \\ \quad \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]5/2, +\infty\right[\end{cases}$$

- Extremos

$\boxed{x = 1/2} \rightsquigarrow \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ série alternada com parte positiva $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \searrow 0 \Rightarrow$ série conv. (Crit. de Leibniz)

Abs. conv.? $\sum \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1} \right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

Como $\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$, temos que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ é da mesma natureza de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que é uma série de Dirichlet com expoente $p = \frac{1}{2} \leq 1$, logo divergente. Assim, a série de potências é só simplesm/ conv. quando $x = 1/2$.

$\boxed{x = 5/2} \rightsquigarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ que já vimos ser uma série div.

Assim, a série de potências é div. quando $x = 5/2$.

6) Calcule $\displaystyle\int_{\log 3}^{\log 8} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$. Sugestão: mudança de variável $t^2 = 1 + e^x$.

- $t^2 = 1+e^x, \ t>1 \Rightarrow x = \log(t^2-1) \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2-1}\,dt$

- $x = \log(3) \Rightarrow t = 2$ e $x = \log(8) \Rightarrow t = 3$

- $\displaystyle\int_{\log(3)}^{\log(8)} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{\cancel{t}} \cdot \frac{2\cancel{t}}{t^2-1}\right) dt =$

$$= \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left[\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_2^3 =$$

$$= \log\left(\frac{2}{4}\right) - \log\left(\frac{1}{3}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right) //$$

7) Desenvolva a função $1/(x+3)^2$ em série de potências de $(x-2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

$$\frac{1}{(x+3)^2} = -\left(\frac{1}{x+3}\right)' = -\left(\frac{1}{(x-2)+5}\right)' = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+\frac{x-2}{5}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x-2}{5}\right)^n\right)', \quad \left|\frac{x-2}{5}\right| < 1$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}(x-2)^n\right)', \quad |x-2| < 5$$

$$= -\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n \cdot n}{5^n}(x-2)^{n-1}, \quad x \in \left]2-5, 2+5\right[$$

$$= -\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{5^{n+1}}(x-2)^n, \quad x \in \left]-3, 7\right[$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{5^{n+2}}(x-2)^n, \quad x \in \left]-3, 7\right[//$$

8) Dê um exemplo de uma função contínua $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt = +\infty$.

Seja por exemplo $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 1/x^2 \quad , x \in]0,1].$$

Temos então que

$$x \cdot \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt = x \int_x^1 \frac{1}{t^3}\, dt =$$

$$= x \cdot \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{t^2} \right]_x^1 = x \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} \right) =$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

9) Mostre que se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt = 0$.

- f contínua no intervalo limitado e fechado $[0,1]$ $\Rightarrow$ f limitada, i.e. $\exists M > 0 : |f(x)| < M, \forall x \in [0,1]$.
- Quando $0 < x \leq 1$ temos então que

$$\left| x \cdot \int_x^1 f(t)/t\, dt \right| = |x| \cdot \left| \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt \right| \leq$$

$$\leq x \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t}\, dt \leq M\, x \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt =$$

$$= M \underbrace{x\,(-\log x)}_{\substack{\text{qd } x \to 0^+ \\ \downarrow \\ 0}} \xrightarrow{x \to 0^+} 0$$

RASCUNHO