

EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1.º Sem. 2022/23

23/Jan/2023 - LMAC - v.1

Duração: 60mn

Número:

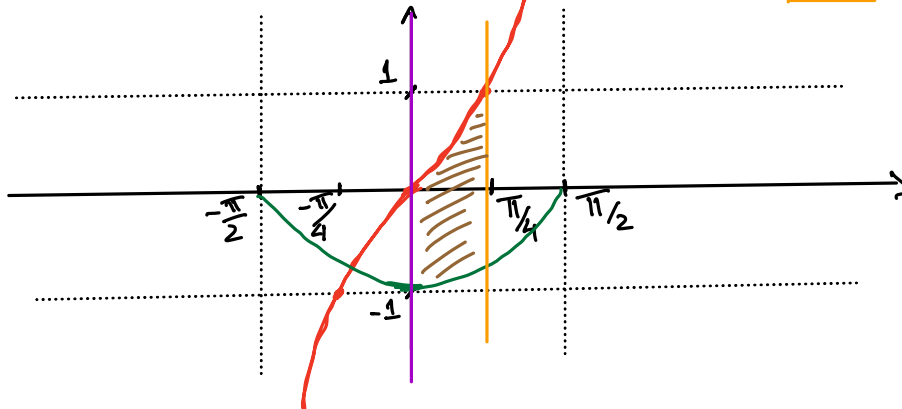
Nome:

- 1) Calcule a derivada da função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \int_{-x}^{1/x} \arctan(t^2) dt$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_{-x}^{1/x} \arctan(t^2) dt \right)' = \arctan\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - \\ &\quad - \arctan((-x)^2) \cdot (-x)' \\ &= \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \arctan(x^2) // \end{aligned}$$

- 2) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \tan(x), \quad y = -\cos(x), \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{\pi}{4}.$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Área}(D) &= \int_0^{\pi/4} [\tan(x) - (-\cos(x))] dx \\ &= \left[-\log(\cos(x)) + \sin(x) \right]_0^{\pi/4} \\ &= \left(-\log(\cos(\pi/4)) + \sin(\pi/4) \right) - 0 \\ &= -\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \log(\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} // \end{aligned}$$

3) Justifique que a seguinte série é convergente e calcule a sua soma: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - (-1)^{n+1}}{2^n}$.

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - (-1)^{n+1}}{2^n} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

↑
Séries geométricas de razão
 $|r = 1/2| < 1$ e $|r = -1/2| < 1$, logo convergentes.

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 - (-1)^{n+1}}{2^n} = 3(2) + \frac{2}{3} = 20/3 //$$

4) Determine a natureza da seguinte série: $\sum \frac{n 2^{2n}}{5^n + 1} = \sum \frac{n 4^n}{5^n + 1}$

• Critério da razão:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+1) 4^{n+1}}{5^{n+1} + 1}}{\frac{n 4^n}{5^n + 1}} =$$

$$= \lim 4 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{5^n + 1}{5(5^n + 1/5)} = 4/5 < 1$$

↓
1

⇒ Série é convergente //

- 5) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum \frac{(3x-2)^n}{3^n(\sqrt{n}+1)} = \sum \frac{(x-2/3)^n}{\sqrt{n}+1}$$

• Raio de convergência:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left(\frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n}+1} \right) = 1,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \text{ Série } \underline{\text{abs. conv.}} \text{ qd } |x-2/3| < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in]2/3-1, 2/3+1[=]-1/3, 5/3[\\ \bullet \text{ Série } \underline{\text{divergente}} \text{ qd } |x-2/3| > 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1/3[\cup]5/3, +\infty[\end{cases}$$

• Extremos

$$\boxed{x = -1/3} \leadsto \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1} \text{ série alternada com}$$

parte positiva $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \searrow 0 \Rightarrow$ série conv. (Crit. de Leibniz)

$$\text{Abs. conv. ? } \sum \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1} \right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1, \text{ temos que } \sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

é de mesma natureza de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que é uma série de Dirichlet com expoente $p = \frac{1}{2} \leq 1$, logo divergente. Assim, a série de potências é só simplesm/conv. quando $x = -1/3$.

$$\boxed{x = 5/3} \leadsto \sum \frac{1}{\sqrt{n}+1} \text{ que já vimos ser uma série } \underline{\text{div.}}$$

Assim, a série de potências é div. quando $x = 5/3$.

6) Calcule $\int_{\log 3}^{\log 8} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$. Sugestão: mudança de variável $t^2 = 1 + e^x$.

$$\bullet t^2 = 1 + e^x, t > 1 \Rightarrow x = \log(t^2 - 1) \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$$

$$\bullet x = \log(3) \Rightarrow t = 2 \quad \text{e} \quad x = \log(8) \Rightarrow t = 3$$

$$\bullet \int_{\log(3)}^{\log(8)} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{\cancel{t}} \cdot \frac{\cancel{2}t}{t^2-1} \right) dt =$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left[\log \left(\frac{t-1}{t+1} \right) \right]_2^3 =$$

$$= \log\left(\frac{2}{4}\right) - \log\left(\frac{1}{3}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right) //$$

7) Desenvolva a função $1/(x+2)^2$ em série de potências de $(x-3)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

$$\frac{1}{(x+2)^2} = - \left(\frac{1}{x+2} \right)' = - \left(\frac{1}{(x-3)+5} \right)' = - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1 + \frac{x-3}{5}} \right)' =$$

$$= - \frac{1}{5} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(- \frac{x-3}{5} \right)^n \right)', \quad \left| \frac{x-3}{5} \right| < 1$$

$$= - \frac{1}{5} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} (x-3)^n \right)', \quad |x-3| < 5$$

$$= - \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{5^n} (x-3)^{n-1}, \quad x \in]3-5, 3+5[$$

$$= - \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{5^{n+1}} (x-3)^n, \quad x \in]-2, 8[$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{5^{n+2}} (x-3)^n, \quad x \in]-2, 8[//$$

8) Dê um exemplo de uma função contínua $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt = +\infty$.

Seja por exemplo $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in]0, 1].$$

Temos então que

$$\begin{aligned} x \cdot \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt &= x \int_x^1 \frac{1}{t^3} dt = \\ &= x \cdot \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{t^2} \right]_x^1 = x \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} \right) = \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty // \end{aligned}$$

9) Mostre que se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt = 0$.

• f contínua no intervalo limitado e fechado $[0, 1]$
 $\Rightarrow f$ limitada, i.e. $\exists M > 0 : |f(x)| < M, \forall x \in [0, 1]$.

• Quando $0 < x \leq 1$ temos então que

$$\begin{aligned} \left| x \cdot \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt \right| &= |x| \cdot \left| \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt \right| \leq \\ &\leq x \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t} dt \leq M x \int_x^1 \frac{1}{t} dt = \\ &= M \underbrace{x (-\log x)}_{\substack{\text{qd } \downarrow x \rightarrow 0^+ \\ 0}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 // \end{aligned}$$

RASCUNHO