Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º Sem. 2022/23 13/Dez/2022 - LMAC - v.2 Duração: 45mn

Número: **Nome:**

1) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(x^2)}{x} & , \ x > 0\,; \\ x\arctan(x^2) & , \ x \leq 0\,. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua no ponto zero. $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$?

- $f(0) = 0 \cdot \arctan(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} x \cdot \arctan(x^2) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sinh(x^2)}{x} = \dfrac{0}{0} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{2x\cosh(x^2)}{1} =$

$= 0 \times 1 = 0.$

- Logo, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ pelo que f é contínua no ponto zero.

(b) Verifique se f é ou não diferenciável no ponto zero.

- $f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x \cdot \arctan(x^2)}{x} =$

$= \lim_{x\to 0^-} \arctan(x^2) = \arctan(0) = 0$

- $f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sinh(x^2)}{x^2} = \dfrac{0}{0} =$

$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{2x\cosh(x^2)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \cosh(x^2) = \cosh(0) = 1$

- Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$ temos que f não é dif. no ponto zero.

2) Calcule: $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\log(x^2-1)$. $= \lim_{x\to 1^+} (x-1)\log\big((x-1)(x+1)\big) =$

$$= \lim_{x\to 1^+} (x-1)\log(x-1) + \underbrace{\lim_{x\to 1^+} \overbrace{(x-1)}^{\to 0}\,\overbrace{\log(x+1)}^{\to \log 2}}_{=0}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x-1)}{\frac{1}{x-1}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{R.L.}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} -(x-1) = 0 //$$

3) Calcule: $\lim_{x\to 0}(x+\cos(x))^{\frac{1}{\arcsin(x)}}$. $= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(x+\cos(x))}{\arcsin(x)}} = e^{1}$

$$= e //$$

$\boxed{C.A.}$ $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+\cos(x))}{\arcsin(x)} = \frac{0}{0} =$$

$$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\sin(x)}{x+\cos(x)}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\frac{1}{0+1}}{\frac{1}{1}} = 1 //$$

4) Determine uma primitiva de $\dfrac{(5+\log x)^7}{x}$. $\quad u(x) = 5+\log(x), \quad u'(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \int \frac{(5+\log x)^7}{x} = \int u(x)^7 \cdot u'(x) = \frac{u(x)^8}{8} = \frac{(5+\log x)^8}{8} //$$

5) Determine uma primitiva de $x\arctan(x^2)$.

$$\int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan(x^2)}_{v} = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \underbrace{\arctan(x^2)}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \cdot \underbrace{\frac{2x}{1+x^4}}_{v'}$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x^2) - \frac{1}{4}\log(1+x^4) //$$

6) Determine uma primitiva de $\dfrac{x^2-4x+6}{(x+2)(x-1)^2}$. $= \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2) = x^2-4x+6$

$x=1 \Rightarrow 3C = 3 \Rightarrow \boxed{C=1}$

$x=-2 \Rightarrow 9A = 18 \Rightarrow \boxed{A=2}$

$x=0 \Rightarrow A-2B+2C=6 \Rightarrow -2B+4=6 \Rightarrow \boxed{B=-1}$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{x^2-4x+6}{(x+2)(x-1)^2} = \int \frac{2}{x+2} - \int \frac{1}{x-1} + \int \frac{1}{(x-1)^2} =$

$= 2\log|x+2| - \log|x-1| - \dfrac{1}{x-1}$ //

7) Usando a substituição $t = e^x$ determine uma primitiva de $\dfrac{e^x}{3+e^{2x}}$.

- $t = e^x \Rightarrow dt = e^x\,dx$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{e^x}{3+e^{2x}}\,dx = \int \frac{1}{3+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \displaystyle\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\dfrac{e^x}{\sqrt{3}}\right)$ //

8) Use o Teorema de Taylor para mostrar que

$$\left|\log(x) - \left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}\right)\right| \leq \frac{1}{4}, \forall x \in [1,2]\,.$$

- $f(x) = \log(x) \Rightarrow f(1) = 0$; $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$;

  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$; $f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$.

- $p_{3,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$

- $|\log(x) - p_{3,1}(x)| = |R_{3,1}(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}(x-1)^4\right| \quad (\theta \in [1,x])$

  $= \left|\frac{-6/\theta^4}{24}(x-1)^4\right| \leq \frac{6}{24} = 1/4$ // , $\forall x \in [1,2]$

9) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que:

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) - \min_{x\in[a,b]} f(x) \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|\,.$$

- f contínua em $[a,b] \Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in [a,b]$ tais que

  $f(\alpha) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ e $f(\beta) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$

- Pelo Teor. de Lagrange, existe c entre α e β t.q.

  $$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(c) \Rightarrow \underbrace{f(\beta) - f(\alpha)}_{\geq 0} = \underbrace{f'(c)\cdot(\beta-\alpha)}_{\geq 0} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) = \underbrace{|\beta-\alpha|}_{\leq b-a} \cdot \underbrace{|f'(c)|}_{\leq \text{máx}|f'|} \leq (b-a)\cdot \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \;//$$