

2º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º Sem. 2022/23

13/Dez/2022 - LMAC - v.1

Duração: 45mn

Número:

Nome:

1) Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan(x^2) & , x \geq 0; \\ \frac{\sinh(x^2)}{x} & , x < 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua no ponto zero. $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

- $f(0) = 0 \cdot \arctan(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \arctan(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sinh(x^2)}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{R.C.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x \cosh(x^2)}{1} = 0 \times 1 = 0$
- Logo $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, pelo que f é cont'ua no ponto zero.

(b) Verifique se f é ou não diferenciável no ponto zero.

- $f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \arctan(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(x^2) = \arctan(0) = 0 //$
- $f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sinh(x^2)}{x^2} = \frac{0}{0} = \stackrel{\text{R.C.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x \cosh(x^2)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cosh(x^2) = \cosh(0) = 1 //$
- Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$ temos que f não é dif. no ponto zero.

2) Calcule: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \log(x^2-4) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \log((x-2)(x+2)) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \log(x-2) + \lim_{x \rightarrow 2^+} \underbrace{(x-2)}_{\rightarrow 0} \overbrace{\log(x+2)}^{\rightarrow \log(4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\log(x-2)}{\frac{1}{x-2}} = \frac{-\infty}{+\infty} \stackrel{\text{R.C.}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{-\frac{1}{(x-2)^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} -(x-2) = 0 //$$

3) Calcule: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{\arcsin(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\log(1 + \sin(x))}{\arcsin(x)}} = e^1 = e //$

C.A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(x))}{\arcsin(x)} = \frac{0}{0} =$

R.C. $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}} = 1 //$

4) Determine uma primitiva de $\frac{(3 + \log x)^9}{x}$. $u(x) = 3 + \log(x)$, $u'(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \int \frac{(3 + \log(x))^9}{x} = \int u(x)^9 \cdot u'(x) = \frac{u(x)^{10}}{10} = \frac{(3 + \log x)^{10}}{10} //$$

5) Determine uma primitiva de $x \arctan(x^2)$.

$$\int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan(x^2)}_v = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_u \underbrace{\arctan(x^2)}_v - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_u \cdot \underbrace{\frac{2x}{1+x^4}}_{v'}$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x^2) - \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{1+x^4} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x^2) - \frac{1}{4} \log(1+x^4) //$$

6) Determine uma primitiva de $\frac{x^2 + 3x - 2}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$$\Rightarrow A(x+1)^2 + B(x-3)(x+1) + C(x-3) = x^2 + 3x - 2$$

$$x = -1 \Rightarrow -4C = -4 \Rightarrow \boxed{C = 1}$$

$$x = 3 \Rightarrow 16A = 16 \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

$$x = 0 \Rightarrow A - 3B - 3C = -2 \Rightarrow -3B - 2 = -2 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-3)(x+1)^2} = \int \frac{1}{x-3} + \int \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= \log|x-3| - \frac{1}{x+1} //$$

7) Usando a substituição $t = e^x$ determine uma primitiva de $\frac{e^x}{5 + e^{2x}}$.

$$\bullet t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^x}{5 + e^{2x}} dx = \int \frac{1}{5 + t^2} dt = \frac{1}{5} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{e^x}{\sqrt{5}}\right) //$$

8) Use o Teorema de Taylor para mostrar que

$$\left| \log(x) - \left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \right) \right| \leq \frac{1}{4}, \forall x \in [1, 2].$$

- $f(x) = \log(x) \Rightarrow f(1) = 0$; $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$;
 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$; $f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$.
- $p_{3,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$
- $|\log(x) - p_{3,1}(x)| = |R_{3,1}(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\theta)}{4!} (x-1)^4 \right| \quad (\theta \in [1, x])$
 $= \left| \frac{-6/\theta^4}{24} (x-1)^4 \right| \leq \frac{6}{24} = \frac{1}{4} // \quad , \quad \forall x \in [1, 2]$

9) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Mostre que:

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) - \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq (b-a) \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

- f contínua em $[a, b] \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in [a, b]$ tais que
 $f(\alpha) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ e $f(\beta) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$
- Pelo Teor. de Lagrange, existe c entre α e β t.q.

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(c) \Rightarrow \underbrace{f(\beta) - f(\alpha)}_{\geq 0} = \underbrace{f'(c) \cdot (\beta - \alpha)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow f(\beta) - f(\alpha) = \underbrace{|\beta - \alpha|}_{\leq b-a} \cdot \underbrace{|f'(c)|}_{\leq \max |f'|} \leq (b-a) \cdot \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| //$$