Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º MAP45 DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º Sem. 2021/22 25/Out/2022 - LMAC - v.1 Duração: 45mn

Número: **Nome:** **Curso:**

1) (2.0 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |2+3x| \geq 1\}$.

$|2+3x| \geq 1 \Leftrightarrow 2+3x \geq 1 \vee 2+3x \leq -1$

$\Leftrightarrow 3x \geq -1 \vee 3x \leq -3$

$\Leftrightarrow x \geq -1/3 \vee x \leq -1$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [-1/3, +\infty[$

Logo, $A =]-\infty, -1] \cup [-1/3, +\infty[$. //

2) (2.0 val.) Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+2\sqrt{x}+9x^4}}{x\sqrt{1+x^2}}$ $= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\sqrt{1/x^4 + \frac{2\sqrt{x}}{x^4} + 9}}{\cancel{x^2}\sqrt{1/x^2 + 1}}$

$= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{1}} = 3$ //

(b) $\lim_{x\to 2} \log(3-x)\cos\left(\frac{1}{x-2}\right)$ $= 0$ por enquadramento:

$-|\log(3-x)| \leq \log(3-x)\cos\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq |\log(3-x)|$

$x \to 2$ $\Rightarrow$ $x \to 2$ $\Leftarrow$ $x \to 2$

$-\log(1) = 0 \quad = \quad 0 \quad = \quad 0 = \log(1)$

3) (2.0 val.) Calcule $f'(x)$, sempre que exista:

(a) $f'(x) = (\sin(\cosh x))' = \cos(\cosh x) \cdot (\cosh x)'$

$= \cos(\cosh x) \cdot \sinh x$ //

(b) $f'(x) = \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}\right)' = \frac{(e^{\sqrt{x}})' \cdot x - e^{\sqrt{x}} \cdot (x)'}{x^2}$

$= \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x - e^{\sqrt{x}}}{x^2} = \frac{e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)}{x^2}$ //

4) **(4.0 val.)** Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k\, k! \left(k + \frac{2}{3}\right) = 3^n\,(n+1)! - 1 \ .$$

$\boxed{P(1)}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} 3^k\, k!\left(k+\frac{2}{3}\right) = 3^1\,(1+1)! - 1 \iff$

$\iff 3\,(1+2/3) = 6-1 \iff 5=5$ ✓

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Hipótese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k k!\left(k+\frac{2}{3}\right) = 3^n(n+1)! - 1$, p/ um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Tese: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 3^k k!\,(k+2/3) = 3^{n+1}(n+2)! - 1$, p/ o mesmo det. $n \in \mathbb{N}$ fixo.

Prova: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 3^k k!\,(k+2/3) =$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{n} 3^k k!\,(k+2/3) + 3^{n+1}(n+1)!\,(n+1+2/3)$

$\overset{hip.}{=} 3^n(n+1)! - 1 + 3\cdot 3^n (n+1)!\,(n+5/3)$

$= 3^n(n+1)!\,(1 + 3n+5) - 1$

$= 3^n(n+1)!\; 3\,(n+2) - 1$

$= 3^{n+1}(n+2)! - 1$ //

c.q.d.

5) (6.0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo o $\mathbb{R}$ e dada por

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & , \ x > 1\,; \\ a\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & , \ -1 \leq x \leq 1\,; \\ e^{b+x} & , \ x < -1\,; \end{cases}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes.

(a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{b+x} = e^{-\infty} = 0 \,//$$

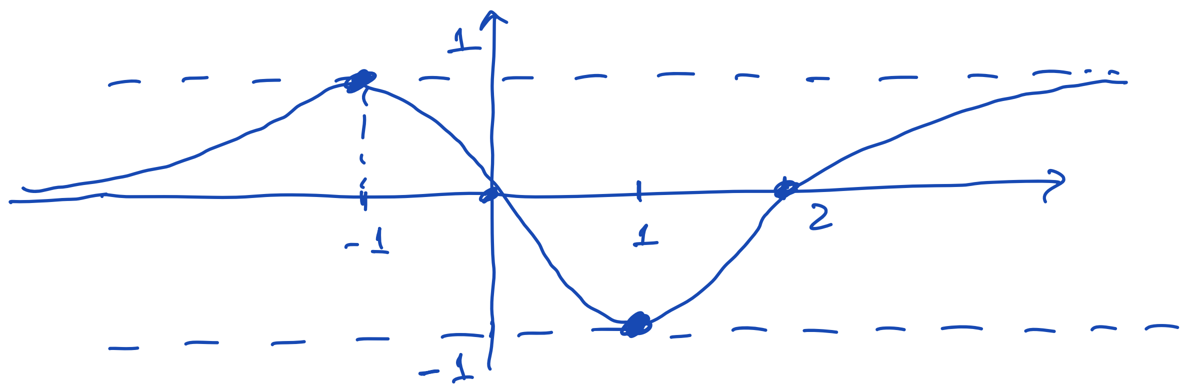
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = \cos(0) = 1 \,//$$

(b) Determine o valor das constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

- $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) \Leftrightarrow \boxed{a = -1}$
- $f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) \Leftrightarrow -\sin(-\pi/2) = e^{b-1} \Leftrightarrow 1 = e^{b-1}$

$\Leftrightarrow b - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = 1}$

(c) Esboce o gráfico de f e determine o seu contradomínio.

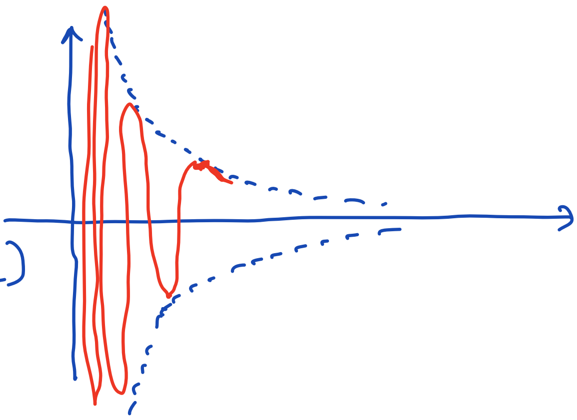


$$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$$

6) (4.0 val.) Seja $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

(a) Mostre por meio de um exemplo que o contradomínio de f pode ser todo o $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x}, \quad x \in]0,1]$$

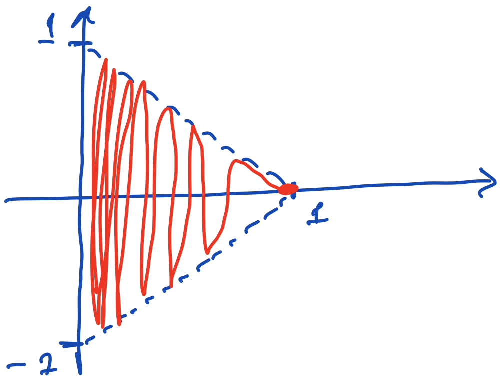


- $x_n^+ = \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2} \Rightarrow f(x_n^+) = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$
- $x_n^- = \dfrac{1}{2n\pi - \pi/2} \Rightarrow f(x_n^-) = -\left(2n\pi - \pi/2\right)$

$\Rightarrow f(]0,1]) = \mathbb{R}$ //

(b) Mostre por meio de um exemplo que f pode ser limitada e não ter nem máximo nem mínimo.

$$f(x) = (1-x)\operatorname{sen}(1/x), \quad x \in]0,1]$$



- $x_n^+ = \dfrac{1}{2n\pi+\pi/2} \Rightarrow f(x_n^+) = 1 - \dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}$
- $x_n^- = \dfrac{1}{2n\pi-\pi/2} \Rightarrow f(x_n^-) = \dfrac{1}{2n\pi-\pi/2} - 1$

$\Rightarrow f(]0,1]) =]-1,1[$ //

(c) Prove que se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. então f tem mínimo no intervalo $]0,1]$.

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists_{\delta>0} : 0 < x < \delta \Rightarrow f(x) > f(1)$
- A restrição de f ao intervalo $[\delta, 1]$ é uma função contínua num intervalo limitado e fechado, pelo que tem máximo e mínimo nesse intervalo (T. Weierstrass). Seja $c \in [\delta, 1]$ um ponto de mínimo de $f|_{[\delta,1]}$, i.e. $f(c) \leq f(x), \ \forall x \in [\delta, 1]$.
- Temos então tb: $f(c) \leq f(1) < f(x), \ \forall x \in]0,\delta[$
- Logo $f(c) \leq f(x), \ \forall x \in]0,1]$, e portanto c é um ponto de mínimo de f em $]0,1]$, c.q.d //