Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

4º MINI-TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º Sem. 2021/22   26/Jan/2021 - LMAC - v.2   Duração: 30mn

Número: **Nome:**

1) Determine uma primitiva da seguinte função racional:

$$\frac{x^2-3}{(x+1)(x^2+3x+2)}$$

- $x^2+3x+2=0 \iff x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} \iff x=-1 \vee x=-2$

- $\int \frac{x^2-3}{(x+1)(x^2+3x+2)} = \int \frac{x^2-3}{(x+1)(x+1)(x+2)} = \int \frac{x^2-3}{(x+1)^2(x+2)} =$

$= \int \frac{A}{x+1} + \int \frac{B}{(x+1)^2} + \int \frac{C}{x+2} = A\log|x+1| - \frac{B}{x+1} + C\log|x+2|$

- $\frac{x^2-3}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2)+B(x+2)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)}$

$\Rightarrow x^2-3 = A(x+1)(x+2)+B(x+2)+C(x+1)^2$

$\boxed{x=-1} \Rightarrow 1-3=B \Rightarrow \boxed{B=-2}$

$\boxed{x=-2} \Rightarrow 4-3=C \Rightarrow \boxed{C=1}$

$\boxed{x=0} \Rightarrow \cancel{-3} = 2A+2B+C = 2A-4+1 = 2A\cancel{-3} \Rightarrow \boxed{A=0}$

- $\int \frac{x^2-3}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{2}{x+1} + \log|x+2|$ //

2) Usando a substituição indicada, determine uma primitiva da seguinte função:

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}, \quad 2x+1=t^2 \overset{t>0}{\Rightarrow} t=\sqrt{2x+1}$$

$\Downarrow$

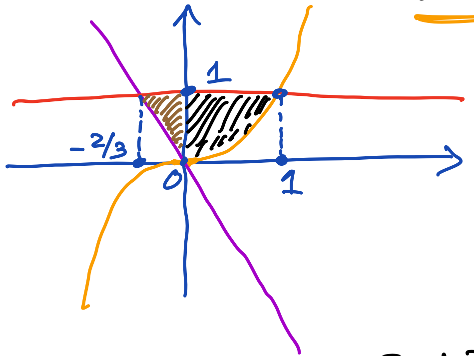
$x=\frac{t^2-1}{2} \Rightarrow dx = t\,dt$

$\Rightarrow \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}dx = \int \frac{1}{\left(\frac{t^2-1}{2}+1\right)\cdot \cancel{t}} \cdot \cancel{t}\,dt =$

$= \int \frac{2}{t^2+1}dt = 2\arctan(t) = 2\arctan\left(\sqrt{2x+1}\right)$ //

3) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = x^3\,, \quad y = -\frac{3x}{2} \quad \text{e} \quad y = 1\,.$$



$$\Rightarrow \text{Área}(D) = \left(\frac{\frac{2}{3}\times 1}{2}\right) + \int_0^1 (1 - x^3)\, dx =$$

$$= \frac{2}{6} + 1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12}$$

4) Seja $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e considere a função $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt\,, \ \forall x \geq 1\,.$$

(a) Mostre que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{g(x)}{\log(x)} = f(1)$. f contínua em $[1, +\infty[\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f(t)}{t}$ contínua em $[1, +\infty[\xrightarrow[\text{Fund. Calc.}]{\text{Teor.}} g$ dif. em $[1, +\infty[$ e $g'(x) = \frac{f(x)}{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{g(x)}{\log(x)} \overset{(*)}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{R.C.}}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)/x}{1/x} = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

(*) pq g é contínua e $g(1) = \int_1^1 (\cdot) = 0$

pq f é contínua $= f(1)$

(b) Mostre que se f for crescente então $\dfrac{g(x)}{\log(x)} \leq f(x)$, $\forall x > 1$. Sugestão: integração por partes.

Como f é dif. e f' é contínua, podemos usar integração por partes na definição de g:

$$g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\, dt = \int_1^x \underbrace{\frac{1}{t}}_{u'} \cdot \underbrace{f(t)}_{v}\, dt =$$

$$= \Big[\underbrace{\log(t)}_{u}\, \underbrace{f(t)}_{v}\Big]_1^x - \boxed{\int_1^x \underbrace{\log(t)}_{u} \cdot \underbrace{f'(t)}_{v'}\, dt}$$

≥ 0, pq $t \geq 1$ e f crescente

$$\geq \log(x) \cdot f(x) - \log(1) \cdot f(1) = \log(x)\, f(x)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq \log(x) \cdot f(x) \xrightarrow[\log(x) > 0]{x > 1} g(x)/\log(x) \geq f(x), \ \forall x > 1.$$