

4º MINI-TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º Sem. 2021/22 26/Jan/2021 - LMAC - v.1 Duração: 30mn

Número:

Nome:

1) Determine uma primitiva da seguinte função racional:

$$\frac{x^2}{(x+2)(x^2+3x+2)}$$

$$\bullet x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

$$\bullet \int \frac{x^2}{(x+2)(x^2+3x+2)} = \int \frac{x^2}{(x+2)(x+2)(x+1)} = \int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} =$$

$$= \int \frac{A}{x+2} + \int \frac{B}{(x+2)^2} + \int \frac{C}{x+1} = A \log|x+2| - \frac{B}{x+2} + C \log|x+1|$$

$$\bullet \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x+2)(x+1) + B(x+1) + C(x+2)^2}{(x+2)^2(x+1)}$$

$$\Rightarrow x^2 = A(x+2)(x+1) + B(x+1) + C(x+2)^2$$

$$\boxed{x=-2} \Rightarrow 4 = -B \Rightarrow \boxed{B=-4}$$

$$\boxed{x=-1} \Rightarrow 1 = C \Rightarrow \boxed{C=1}$$

$$\boxed{x=0} \Rightarrow 0 = 2A + B + 4C = 2A - 4 + 4 \Rightarrow \boxed{A=0}$$

$$\bullet \int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{4}{x+2} + \log|x+1| //$$

2) Usando a substituição indicada, determine uma primitiva da seguinte função:

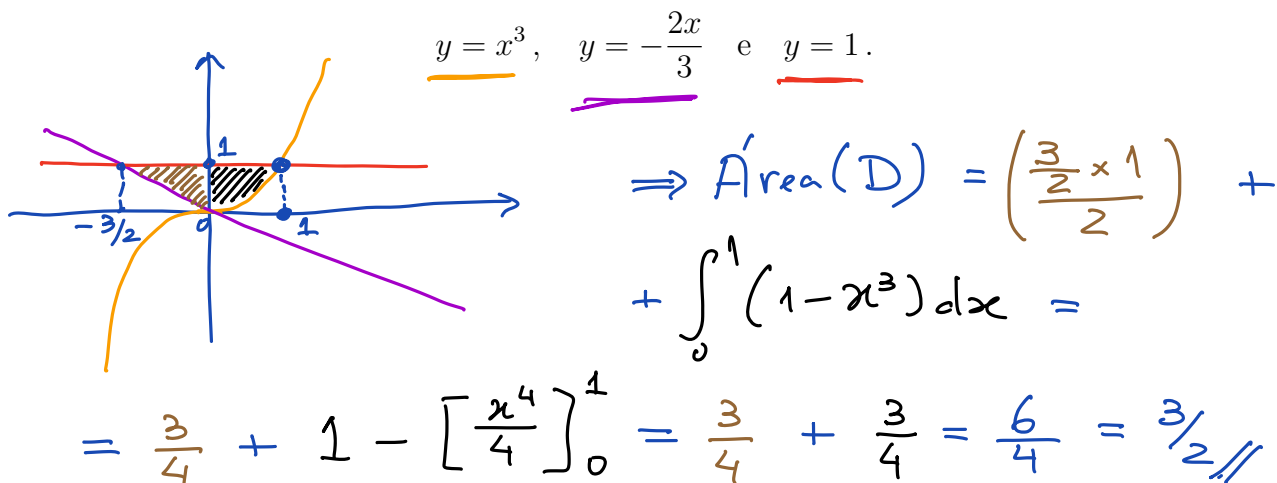
$$\frac{1}{(x-1)\sqrt{2x-3}}, \quad 2x-3 = t^2 \xRightarrow{t>0} t = \sqrt{2x-3}$$

$$\Downarrow x = \frac{t^2+3}{2} \Rightarrow dx = t dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{t^2+3}{2} - 1\right) \cdot t} \cdot t dt =$$

$$= \int \frac{2}{t^2+1} dt = 2 \arctan(t) = 2 \arctan(\sqrt{2x-3}) //$$

3) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas



4) Seja $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e considere a função $g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt, \quad \forall x \geq 1.$$

(a) Mostre que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{\log(x)} = f(1)$. f contínua em $[1, +\infty[\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f(t)}{t}$ contínua em $[1, +\infty[\xrightarrow[\text{Fund. Calc.}]{\text{Teor.}}$ g dif. em $[1, +\infty[$ e $g'(x) = \frac{f(x)}{x}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{\log(x)} \stackrel{(*)}{=} \frac{0}{0} \stackrel{\text{R.C.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)/x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

(*) pq g é contínua e $g(1) = \int_1^1 (\cdot) = 0$

pq f é contínua $\Rightarrow f(1)$

(b) Mostre que se f for crescente então $\frac{g(x)}{\log(x)} \leq f(x)$, $\forall x > 1$. Sugestão: integração por partes.

Como f é dif. e f' é contínua, podemos usar integração por partes na definição de g :

$$g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^x \underbrace{\frac{1}{t}}_{u'} \cdot \underbrace{f(t)}_v dt =$$

$$= \left[\underbrace{\log(t)}_u \cdot \underbrace{f(t)}_v \right]_1^x - \int_1^x \underbrace{\log(t)}_u \cdot \underbrace{f'(t)}_{v'} dt \geq 0, \text{ pq } t \geq 1 \text{ e } f \text{ crescente}$$

$$\geq \log(x) \cdot f(x) - \log(1) \cdot f(1) = \log(x) f(x)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq \log(x) \cdot f(x) \xrightarrow[\log(x) > 0]{x > 1} \frac{g(x)}{\log(x)} \geq f(x), \quad \forall x > 1.$$