Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

3º MINI-TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º Sem. 2021/22 15/Dez/2021 - LMAC - v.1 Duração: 30mn

Número: **Nome:**

1) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(e^{x^2} - 1)}{x} & , \ x > 0\,; \\ \arcsin(x) & , \ -1 \le x \le 0\,. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.

$\boxed{-1<x<0} \Rightarrow f'(x) = (\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ (pelo Cor. do T. de Lagrange)

Por outro lado,

$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{x} - \underbrace{\arcsin(0)}_{=0}}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{x^2} = \dfrac{\sin(1-1)}{0} = \dfrac{0}{0}$

$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos(e^{x^2}-1)\cdot e^{x^2}\cdot \cancel{2x}}{\cancel{2x}} = \cos(0)\cdot e^0 = 1$

- $f'_e(0) = 1 = f'_d(0) \Rightarrow f$ é dif. em zero e $f'(0) = 1$.

(b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(0) = -2$ e $g'(0) = 3$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $h = (g \circ f)$ no ponto de abcissa $x = 0$.

- $(y - h(0)) = h'(0)(x-0) \Rightarrow y = h(0) + h'(0)\cdot x$
- $h(0) = g(f(0)) = g(0) = -2$
- $h'(0) = g'(f(0))\cdot f'(0) = g'(0)\cdot 1 = 3\cdot 1 = 3$

$\Rightarrow$ eq. da recta tangente ao gráfico de h em $(0, h(0))$ é $\boxed{y = -2 + 3x}$

2) Calcule:

(a) $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{\arctan(2x)}}$ $= 1^{\infty} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1+\frac{x}{3})}{\arctan(2x)}} = e^{1/6}$ //

$\boxed{C.A.}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\arctan(2x)} = \frac{0}{0} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1/3}{1+x/3}}{\frac{2}{1+4x^2}}$

$= \frac{1/3}{2} = 1/6$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \sinh\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{x}$ $= 0\cdot +\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(1/x)}{e^{-x}} = \frac{0}{0} =$

$\overset{R.C.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh(1/x)\cdot(-1/x^2)}{-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \cosh(1/x)\cdot \frac{e^{x}}{x^2}$

$x\to+\infty$: $\cosh(0)=1$; $x\to+\infty$: $+\infty$

$= 1\cdot(+\infty) = \underline{\underline{+\infty}}$

3) Determine uma primitiva de cada uma da seguintes funções.

(a) $\int \frac{x\cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+5}}$ $= \int u'\cos(u) = \operatorname{sen}(u) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+5}\right)$ //

$u(x) = \sqrt{x^2+5} \Rightarrow u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

(b) $\int \underbrace{(x+7)}_{u}\underbrace{e^{x-5}}_{v'}$ $= \underbrace{(x+7)}_{u}\underbrace{e^{x-5}}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{e^{x-5}}_{v} = (x+7)e^{x-5} - e^{x-5}$

$= (x+6)e^{x-5}$ //

$u = x+7 \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^{x-5} \Rightarrow v = e^{x-5}$