

2º MINI-TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º Sem. 2021/22 10/Nov/2021 - LMAC - v.2 Duração: 30mn

Número:

Nome:

1) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua em todo o  $\mathbb{R}$  e dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & , x \geq 1; \\ |x| - k & , -1 < x < 1; \\ \log\left(2 + \frac{1}{x}\right) & , x \leq -1; \end{cases}$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante.

(a) Determine o valor da constante  $k \in \mathbb{R}$ .

$$f(1) = \sin(\pi) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} |x| - k = 1 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

ou

$$f(-1) = \log\left(2 + \frac{1}{-1}\right) = \log(1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} |x| - k = 1 - k = 0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

(b) Calcule:

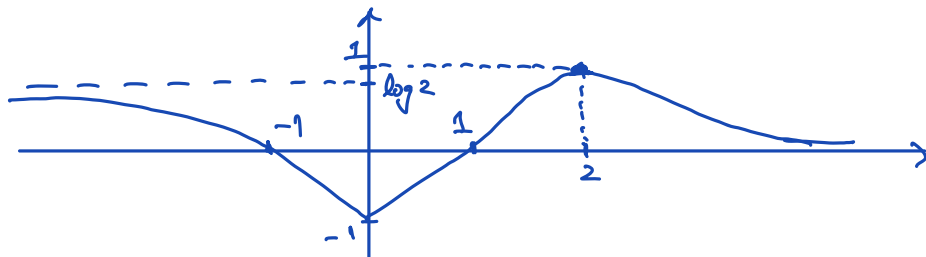
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \log(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| - k = -k = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \sin(0) = 0$$

(c) Esboce o gráfico de  $f$  e determine o seu contradomínio.



$$f(\mathbb{R}) = [-1, 1].$$

2) Calcule  $f'(x)$ , sempre que exista:

$$(a) f'(x) = \left( \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right)' = \frac{1}{1 + 1/x} \cdot \left( 1 + \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{1 + 1/x} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right)$$

$$(b) f'(x) = \left( \frac{e^{\tan x}}{x^2} \right)' = \frac{(e^{\tan x})' \cdot x^2 - e^{\tan x} \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{e^{\tan(x)} \cdot (\tan x)' \cdot x^2 - e^{\tan x} \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{e^{\tan(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x^2 - e^{\tan x} \cdot 2x}{x^4}$$

$$(c) f'(x) = (\cosh(\sqrt{x}))'$$

$$= \sinh(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' = \sinh(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4) Seja  $f$  uma função contínua em  $\mathbb{R}$ , tal que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Prove que  $] -1, 1[ \subset f(\mathbb{R})$ . Seja  $\alpha \in ] -1, 1[$  e  $\varepsilon = \min(1 - \alpha, \alpha - (-1)) > 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \exists L^- > 0 : x < -L^- \Rightarrow |f(x) - (-1)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -( \alpha + 1 ) < \underbrace{f(x) + 1}_{< \alpha + 1} < \alpha + 1 \Rightarrow f(x) < \alpha.$$

Em particular  $f(-L^- - 1) < \alpha$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \exists L^+ > 0 : x > L^+ \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha - 1 < f(x) - 1}_{< 1 - \alpha} < 1 - \alpha \Rightarrow \alpha < f(x)$$

Em particular  $f(L^+ + 1) > \alpha$ .

$$\bullet f \text{ contínua} \xRightarrow{\text{TVI}} \exists c \in ] -L^- - 1, L^+ + 1[ \text{ t.q. } f(c) = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \in f(\mathbb{R}).$$