Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º SEM. 2021/22 24/FEV/2022, 08.00 - V. 2 DURAÇÃO: 2H

1. (1,5 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ |2x-1| \geq x^2\right\}.$$

• $|2x-1| \geq x^2 \Leftrightarrow 2x-1 \geq x^2 \quad \vee \quad 2x-1 \leq -x^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1 \leq 0 \quad \vee \quad x^2+2x-1 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0 \quad \vee \quad \left(x \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]\right)$

$\Leftrightarrow x \in \underline{\underline{\{1\} \cup [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]}}$

C.A.: $x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

2. (1,5 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{n!\,3^n}} \equiv P(n)$$

$\boxed{P(1)}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{3k-1}{k!\,3^k} \overset{?}{=} 1 - \frac{1}{1!\,3^1}$ ✓

$\frac{3 \cdot 1 - 1}{1!\,3^1} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$

$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$

Hip.: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{n!\,3^n}$, p/ um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo

A provar: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,3^{n+1}}$, p/ o mesmo det. $n \in \mathbb{N}$

Dem.: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3k-1}{k!\,3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k!\,3^k} + \frac{3(n+1)-1}{(n+1)!\,3^{n+1}} \overset{\text{Hip.}}{=} 1 - \frac{1}{n!\,3^n} +$

$\displaystyle + \frac{3n+2}{(n+1)!\,3^{n+1}} = 1 - \left(\frac{3(n+1)}{(n+1)!\,3^{n+1}} - \frac{3n+2}{(n+1)!\,3^{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!\,3^{n+1}}.$ // Q.E.D.

3. (2,0 val.) Considere a função $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\operatorname{arcsen}(x)}{x^2}, & \text{se } x\in[-1,1]\setminus\{0\};\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável em $x=0$ com $f'(0)=-1/6$.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arcsen}(x)}{x^3}=\frac{0}{0}=$$

$$\overset{R.C.}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}+1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-x^2)-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{1-x^2}+1)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\,(\sqrt{1-x^2}+1)}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-1/6$$

(b) Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(0)=1$ e $g'(0)=6$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $h=(g\circ f)$ no ponto de abcissa $x=0$.

- $h(0)=g(f(0))=g(0)=1$
- $h'(0)=(g\circ f)'(0)=g'(f(0))\cdot f'(0)=g'(0)\cdot(-1/6)=6\cdot(-1/6)=-1$
- $(y-\underbrace{h(0)}_{1})=\underbrace{h'(0)}_{-1}(x-0)\iff\boxed{y=1-x}$

4. (1,0 val.) Calcule:

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\arctan(x)}}.$$

- $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\arctan(x)}}=1^{\infty}=$ indet

$$=\lim_{x\to0}e^{\log\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/\arctan(x)}\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to0}\frac{\log(1+\frac{x}{2})}{\arctan(x)}}=\boxed{e^{1/2}}$$

C.A.: $\lim_{x\to0}\dfrac{\log(1+\frac{x}{2})}{\arctan(x)}=\dfrac{0}{0}=$

$$\overset{R.C.}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1/2}{1+x/2}}{\frac{1}{1+x^2}}=1/2$$

5. (4,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\sqrt{1+\cosh(x)}}$ (b) $\dfrac{x^2-3}{(x+1)(x^2+3x+2)}$

(c) $(xe^x)^2$ (d) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$ (sugestão $t^2 = 2x+1$)

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh}(x)}{\sqrt{1+\cosh(x)}} = 2\sqrt{1+\cosh(x)}$ // (quase-imediata)

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{(x+1)(x^2+3x+2)} = \int \frac{x^2-3}{(x+1)(x+1)(x+2)} = \int \frac{x^2-3}{(x+1)^2(x+2)}$

$\displaystyle = \int \frac{A}{x+1} + \int \frac{B}{(x+1)^2} + \int \frac{C}{x+2} = A \log|x+1| - \frac{B}{x+1} + C \log|x+2|$

C.A.: $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x+2} = \dfrac{x^2-3}{(x+1)^2(x+2)}$

$\Leftrightarrow A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2 = x^2-3$

$x=-1 \Rightarrow B = 1-3 \Rightarrow \boxed{B=-2}$

$x=-2 \Rightarrow C = 4-3 \Rightarrow \boxed{C=1}$

$x=0 \Rightarrow 2A + 2B + C = -3 \Leftrightarrow 2A = 4-1-3 \Leftrightarrow \boxed{A=0}$

(c) $\displaystyle\int (xe^x)^2 = \int \underbrace{x^2}_{v} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{u'} = \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{u} - \int \underbrace{2x}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{u} =$

$\displaystyle = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left[x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \right]$

$\displaystyle = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4}$ //

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}\, dx = \int \frac{1}{\left(\frac{t^2-1}{2}+1\right)\cancel{t}} \cdot \cancel{t}\, dt$

$t^2 = 2x+1$, $t>0$

$\Rightarrow x = \dfrac{t^2-1}{2}$

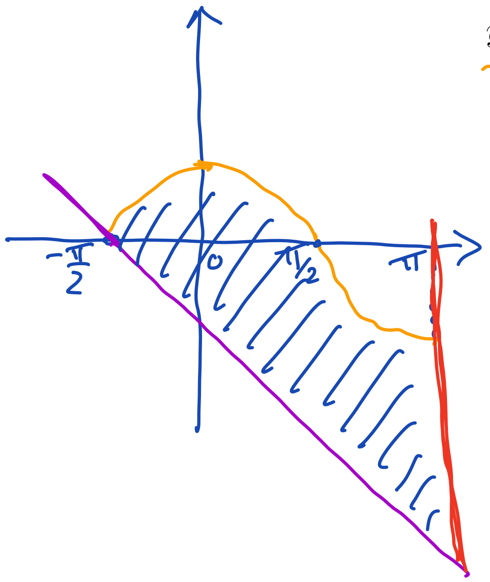
$\displaystyle = \int \frac{1}{\frac{t^2+1}{2}} \cdot dt = 2 \arctan(t)$

$\Rightarrow dx = t\,dt$

$= 2 \arctan\left(\sqrt{2x+1}\right)$ //

6. (1,5 val.) Esboce e determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \cos(x)\,, \quad y = -\frac{\pi}{2} - x \quad \text{e} \quad x = \pi\,.$$



$$\text{Área}(D) = \int_{-\pi/2}^{\pi} \left[\cos(x) - \left(-\tfrac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3\pi}{2} + \int_{-\pi/2}^{\pi} \left[\cos(x) + x\right]$$

$$= \frac{3\pi^2}{4} + \left[\operatorname{sen}(x) + \frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{3\pi^2}{4} + \left[\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(\pi)}}_{=0} + \frac{\pi^2}{2} - \underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(-\pi/2)}}_{-1} - \frac{\pi^2}{8}\right] = 1 + \frac{9\pi^2}{8}$$

7. (2,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n\sqrt{n(n+1)}}\,.$$

- $R = \lim \dfrac{\frac{1}{3^n\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{3^{n+1}\sqrt{(n+1)(n+2)}}} = \lim 3\sqrt{\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}} = 3$
- Abs. conv. qd $|x-4| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-4 < 3 \Leftrightarrow \boxed{1 < x < 7}$
- Divergente qd $|x-4| > 3 \Leftrightarrow \boxed{x \in]-\infty, 1[\cup]7, +\infty[}$
- Extremos

$\boxed{x=1}$ $\rightsquigarrow \sum_n \dfrac{(-3)^n}{3^n\sqrt{n(n+1)}} = \sum_n \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ Série alternada $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \searrow 0$

$\xRightarrow[\text{Leibniz}]{\text{Crit.}}$ convergente

$\rightsquigarrow \sum_n \left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right| = \sum_n \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ $\underset{\text{natureza}}{\text{mesma}}$ $\sum_n \dfrac{1}{n}$ div.

$\Rightarrow \boxed{\text{simplesmente convergente quando } x=1}$

$\boxed{x=7}$ $\rightsquigarrow \sum_n \dfrac{3^n}{3^n\sqrt{n(n+1)}} = \sum_n \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ divergente

$\Rightarrow \boxed{\text{divergente quando } x=7}$

8. (2,0 val.) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

é uma série de termos positivos convergente.

• Considerando $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x-\log(1+x)$, temos que $f(0)=0$ e $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0, \forall x>0$.
Logo f é estritam/ crescente e $f(x)>0$, $\forall x>0$

$\Rightarrow f(1/n)=\frac{1}{n}-\log(1+1/n)>0, \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

• $f(0)=f'(0)=0$ e $f''(x)=\frac{1\cdot(1+x)-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}\Rightarrow f''(0)=1$,

pelo que $x-\log(1+x)=\frac{x^2}{2}+R_{2,0}(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2/2}=1 \Rightarrow \lim \frac{\frac{1}{n}-\log(1+1/n)}{1/n^2}=2$

$\overset{\text{Crit. Comp.}}{\Longrightarrow} \sum_n\left(\frac{1}{n}-\log(1+1/n)\right)\sim\sum_n\frac{1}{n^2}$ que é convergente.

9. (2,0 val.) Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua e considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt\,, & \text{se } x\neq 0;\\ g(0)\,, & \text{se } x=0.\end{cases}$$

(a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e mostre que é contínua no ponto zero.

• g contínua $\overset{\text{TFC}}{\Longrightarrow} \int_0^x g$ diferenciável em $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \int_0^x g/x$ diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

• $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x g}{x}=\frac{0}{0}$

$\overset{\text{R.C.}}{\underset{\text{TFC}}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{1}\underset{g\text{ cont.}}{=}g(0)=f(0)\Rightarrow f$ é contínua em 0.

(b) Mostre que se g for diferenciável no ponto zero então f também é diferenciável nesse ponto e $f'(0)=g'(0)/2$.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\int_0^x g}{x}-g(0)}{x-0}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x g - x\cdot g(0)}{x^2}=\frac{0}{0}=$

$\overset{\text{R.C.}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{2x}=\frac{1}{2}\cdot g'(0)$ // (pq g é dif. em 0)

10. (2,5 val.) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva (i.e. $h(x) > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$) tal que

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} h(x)\,.} \quad (*)$$

(a) Prove que h tem máximo e, denotando esse máximo por $M \in \mathbb{R}^+$, prove que $h(\mathbb{R}) =]0, M]$.

Seja $\alpha = h(0) > 0$.

- $(*) \Rightarrow \exists_{L>0} : |x| > L \Rightarrow 0 < h(x) < \alpha$.
- Pelo Teor. de Weierstrass, h tem máximo no intervalo limitado e fechado $[-L, L]$. Seja $M = f(c) \in \mathbb{R}^+$, $c \in [-L, L]$, esse máximo. Como $0 \in [-L, L]$ temos que

  $M = f(c) \geq f(0) = \alpha > h(x)$ para qq x com $|x| > \alpha$.

  Logo $M = f(c) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f tem máximo.
- Já sabemos que $f(\mathbb{R}) \subset]0, M]$ e $M \in f(\mathbb{R})$.

  Para provar que $]0, M[\subset f(\mathbb{R})$, suponhamos por absurdo que existe $0 < \beta < M$ t.q. $\beta \notin f(\mathbb{R})$. Então, pelo Teor. Val. Inter., teríamos que $f(x) > \beta$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) \geq \beta > 0$ o que contradiz $(*)$.

(b) Suponha agora que h é também diferenciável e que o $\lim_{x\to+\infty} h'(x)$ existe. O que pode dizer sobre o seu valor? Justifique.

Se o $\lim_{x\to+\infty} h'(x)$ existe, então $\lim_{x\to+\infty} h'(x) = 0$.

De facto, como $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$ temos que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário

$$\exists_{L>0} : x > L \Rightarrow 0 < h(x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |h(x_1) - h(x_2)| < 2\varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 > L.$$

Aplicando o Teor. de Lag. a intervalos da forma $[x, x+1]$, com $x > L$, obtemos que para qq $x > L$ existe $c(x) \in]x, x+1[$ t.q.

$$|h'(c(x))| = \left|\frac{h(x+1) - h(x)}{x+1 - x}\right| = |h(x+1) - h(x)| < 2\varepsilon$$

Como $x \to +\infty \Rightarrow c(x) \to +\infty$, concluímos que $\lim_{x\to+\infty} |h'(x)| < 2\varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ arbitrário, pelo que a única possibilidade é $\lim_{x\to+\infty} h'(x) = 0$.