

2º EXAME DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º SEM. 2021/22 24/FEV/2022, 08.00 - V. 1 DURAÇÃO: 2H

1. (1,5 val.) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 1| \geq x^2\}.$$

$$\bullet |2x+1| \geq x^2 \Leftrightarrow 2x+1 \geq x^2 \vee 2x+1 \leq -x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \vee x^2 + 2x + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]) \vee (x+1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \underline{\underline{[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}] \cup \{-1\}}}$$

$$\underline{\text{C.A.}} : x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

2. (1,5 val.) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{k! 2^k} = 1 - \frac{1}{n! 2^n}} \equiv P(n)$$

$$\boxed{P(1)} \quad \sum_{k=1}^1 \frac{2k-1}{k! 2^k} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{1! 2^1}$$

$$\frac{2 \cdot 1 - 1}{1! 2^1} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\boxed{P(n) \Rightarrow P(n+1)}$$

Hip. : $\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{k! 2^k} = 1 - \frac{1}{n! 2^n}$, p/um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo

A provar : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{k! 2^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}}$, p/ o mesmo det. $n \in \mathbb{N}$.

Deus : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{k! 2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{k! 2^k} + \frac{2(n+1)-1}{(n+1)! 2^{n+1}}$

$$\stackrel{\text{Hip.}}{=} 1 - \frac{1}{n! 2^n} + \frac{2n+1}{(n+1)! 2^{n+1}} = 1 - \left(\frac{2(n+1)}{(n+1)! 2^{n+1}} - \frac{2n+1}{(n+1)! 2^{n+1}} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} \quad \underline{\underline{\text{Q.E.D.}}}$$

3. (2,0 val.) Considere a função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsen(x) - x}{x^2}, & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = 1/6$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x) - x}{x^3} = \frac{0}{0} = \\ \text{R.C.} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1-x^2)}{3x^2 \sqrt{1-x^2} (1 + \sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2} (1 + \sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}} \end{aligned}$$

(b) Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(0) = 1$ e $g'(0) = -6$. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $h = (g \circ f)$ no ponto de abscissa $x = 0$.

$$\bullet h'(0) = (g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0) = g'(0) \cdot \frac{1}{6} = -6 \cdot \frac{1}{6} = -1$$

$$\bullet h(0) = g(f(0)) = g(0) = 1$$

$$\bullet (y - \underbrace{h(0)}_1) = \underbrace{h'(0)}_{-1} (x - 0) \Leftrightarrow \boxed{y = 1 - x}$$

4. (1,0 val.) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{\arctan(x)}}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{\arctan(x)}} &= 1^{\infty} = \text{indet.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log \left(\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{\arctan(x)}} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(1 + \frac{x}{3}\right)}{\arctan(x)} \\ &= e \\ &= \boxed{e^{1/3}} \end{aligned}$$

$$\text{C.A.: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(1 + \frac{x}{3}\right)}{\arctan(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\text{R.C.: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1/3}{1 + x/3}}{\frac{1}{1 + x^2}} = \frac{1/3}{1} //$$

5. (4,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $\frac{\cosh(x)}{\sqrt{1+\sinh(x)}}$

(b) $\frac{x^2}{(x+2)(x^2+3x+2)}$

(c) $(xe^x)^2$

(d) $\frac{1}{(x-1)\sqrt{2x-3}}$ (sugestão: $t^2 = 2x-3$)

(a) $\int \frac{\cosh(x)}{\sqrt{1+\sinh(x)}} = 2 \sqrt{1+\sinh(x)} \quad (\text{quase-imediata})$

(b) $\int \frac{x^2}{(x+2)(x^2+3x+2)} = \int \frac{x^2}{(x+2)(x+2)(x+1)} = \int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}$
 $= \int \frac{A}{x+2} + \int \frac{B}{(x+2)^2} + \int \frac{C}{x+1} = A \log|x+2| - \frac{B}{x+2} + C \log|x+1|$
C.A.: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}$

$\Leftrightarrow A(x+2)(x+1) + B(x+1) + C(x+2)^2 = x^2$

$x=-2 \Rightarrow -B = (-2)^2 \Leftrightarrow \boxed{B=-4}$

$x=-1 \Rightarrow C = (-1)^2 \Leftrightarrow \boxed{C=1}$

$x=0 \Rightarrow 2A + B + 4C = 0 \Leftrightarrow 2A = 4 - 4 \Leftrightarrow \boxed{A=0}$

(c) $\int (xe^x)^2 = \int \frac{x^2}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{e^{2x}}{\frac{1}{x}} = \frac{x^2}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{e^{2x}}{\frac{1}{x}} - \int \frac{2x}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{e^{2x}}{\frac{1}{x}} =$
 $= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left[x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \right]$
 $= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} //$

(d) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{t^2+3}{2}-1\right)} \cdot \frac{1}{t} dt$

$t^2 = 2x-3, \quad \underline{t \geq 0}$

$\Rightarrow x = \frac{t^2+3}{2}$

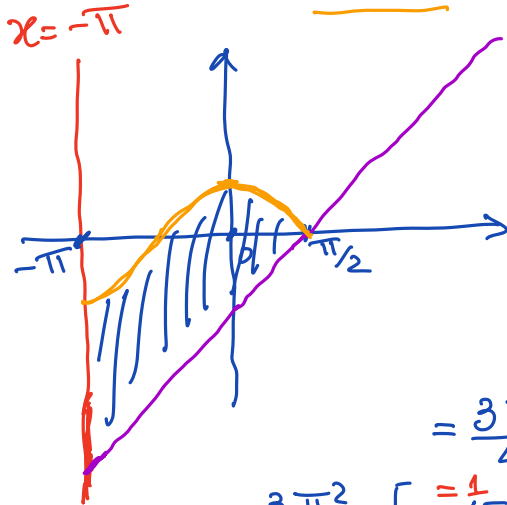
$\Rightarrow dx = t dt$

$= \int \frac{1}{\frac{t^2+1}{2}} dt = 2 \arctan(t)$

$= 2 \arctan(\sqrt{2x-3}) //$

6. (1,5 val.) Esboce e determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \cos(x), \quad y = -\frac{\pi}{2} + x \quad \text{e} \quad x = -\pi.$$



$$\begin{aligned} \text{Área}(D) &= \int_{-\pi}^{\pi/2} [\cos(x) - (-\pi/2 + x)] \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{3\pi}{2} \right) + \int_{-\pi}^{\pi/2} [\cos(x) - x] \\ &= \frac{3\pi^2}{4} + \left[\sin(x) - \frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi/2} \\ &= \frac{3\pi^2}{4} + \left[\cancel{\sin(\pi/2)} - \frac{\pi^2}{8} - \cancel{\sin(-\pi)} + \frac{\pi^2}{2} \right] = 1 + \frac{9\pi^2}{8} \end{aligned}$$

7. (2,0 val.) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a seguinte série de potências é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n \sqrt{n(n+1)}}.$$

$$\bullet R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4^n \sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{4^{n+1} \sqrt{(n+1)(n+2)}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}} = 4$$

$$\bullet \text{ Abs. conv. } \text{ qd } |x-3| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-3 < 4 \Leftrightarrow \boxed{-1 < x < 7}$$

$$\bullet \text{ Divergente } \text{ qd } |x-3| > 4 \Leftrightarrow \boxed{x \in]-\infty, -1[\cup]7, +\infty[}$$

• Extremos

$$\boxed{x=-1} \rightsquigarrow \sum_n \frac{(-4)^n}{4^n \sqrt{n(n+1)}} = \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \begin{array}{l} \text{série alternada,} \\ \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \rightarrow 0 \end{array}$$

Crit.
Leibniz

convergente.

$$\rightsquigarrow \sum_n \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right| = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \begin{array}{l} \text{mesma} \\ \text{natureza} \end{array} \quad \sum_n \frac{1}{n} \text{ div.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Simplesmente convergente quando } x=-1}$$

$$\boxed{x=7} \rightsquigarrow \sum_n \frac{4^n}{4^n \sqrt{n(n+1)}} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \text{divergente}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{divergente quando } x=7}$$

8. (2,0 val.) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

é uma série de termos positivos convergente.

- Considerando $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - \log(1+x)$, temos que $f(0) = 0$ e $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0, \forall x > 0$. Logo f é estritamente crescente e $f(x) > 0, \forall x > 0$.
 $\Rightarrow f(1/n) = \frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n}) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
- $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(x) = \frac{1 \cdot (1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = 1$, pelo que $x - \log(1+x) = \frac{x^2}{2} + R_{2,0}(x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2/2} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} = 2$
 Crit. $\Rightarrow \sum_n \left(\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n}) \right) \sim \sum_n \frac{1}{n^2}$ que é convergente.
 Comp.

9. (2,0 val.) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e considere a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & \text{se } x \neq 0; \\ f(0), & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e mostre que é contínua no ponto zero.

- f contínua $\xrightarrow{\text{TFC}} \int_0^x f$ diferenciável em $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow \int_0^x f/x$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f}{x} = \frac{0}{0}$
- R.C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1} \stackrel{\text{TFC}}{=} \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = g(0) \Rightarrow g$ é contínua em 0.

(b) Mostre que se f for diferenciável no ponto zero então g também é diferenciável nesse ponto e $g'(0) = f'(0)/2$.

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\int_0^x f}{x} - f(0)}{x - 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f - x \cdot f(0)}{x^2} = \frac{0}{0} = \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{R.C.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x} = \frac{1}{2} \cdot f'(0) \quad \left(\text{pq } f \text{ é dif. em } 0 \right)$$

10. (2,5 val.) Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva (i.e. $h(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$) tal que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)} \quad (*)$$

- (a) Prove que h tem máximo e, denotando esse máximo por $M \in \mathbb{R}^+$, prove que $h(\mathbb{R}) =]0, M]$.
 Seja $\alpha = h(0) > 0$.

- $(*) \Rightarrow \exists L > 0 : |x| > L \Rightarrow 0 < h(x) < \alpha$.
- Pelo Teor. de Weierstrass, h tem máximo no intervalo limitado e fechado $[-L, L]$. Seja $M = f(c) \in \mathbb{R}^+$, $c \in [-L, L]$, esse máximo. Como $0 \in [-L, L]$ temos que $M = f(c) \geq f(0) = \alpha > h(x)$ para $\forall x$ com $|x| > L$.
 Logo $M = f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f tem máximo.
- Já sabemos que $f(\mathbb{R}) \subset]0, M]$ e $M \in f(\mathbb{R})$.
 Para provar que $]0, M[\subset f(\mathbb{R})$, suponhamos por absurdo que existe $0 < \beta < M$ t.q. $\beta \notin f(\mathbb{R})$.
 Então, pelo Teor. Val. Inter., teríamos que $f(x) > \beta$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \geq \beta > 0$ o que contradiz $(*)$.

- (b) Suponha agora que h é também diferenciável e que o $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x)$ existe. O que pode dizer sobre o seu valor? Justifique.

Se o $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x)$ existe, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = 0$.

De facto, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ temos que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário

$$\exists L > 0 : x > L \Rightarrow 0 < h(x) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |h(x_1) - h(x_2)| < 2\varepsilon, \quad \forall x_1, x_2 > L.$$

Aplicando o Teor. de Lag. a intervalos da forma $[x, x+1]$, com $x > L$, obtemos que para $\forall x > L$ existe $c(x) \in]x, x+1[$ t.q.

$$|h'(c(x))| = \left| \frac{h(x+1) - h(x)}{x+1 - x} \right| = |h(x+1) - h(x)| < 2\varepsilon$$

Como $x \rightarrow +\infty \Rightarrow c(x) \rightarrow +\infty$, concluímos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} |h'(x)| < 2\varepsilon$, com $\varepsilon > 0$ arbitrário, pelo que a única possibilidade é $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = 0$.