

1º MINI-TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º Sem. 2021/22 20/Out/2021 - LMAC - v.2 Duração: 30mn

Número:

Nome:

Curso:

- 1) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < |7-2x|\}.$$

$$|x+1| < |7-2x|$$

$$\Leftrightarrow x+1 < |7-2x| \quad \wedge \quad x+1 > -|7-2x|$$

$$\Leftrightarrow |7-2x| > x+1 \quad \wedge \quad |7-2x| > -x-1$$

$$\Leftrightarrow (7-2x > x+1 \vee 7-2x < -x-1) \wedge (7-2x > -x-1 \vee 7-2x < x+1)$$

$$\Leftrightarrow (6 > 3x \vee 8 < x) \wedge (8 > x \vee 6 < 3x)$$

$$\Leftrightarrow (x < 2 \vee x > 8) \wedge (x < 8 \vee x > 2)$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[\cup]8, +\infty[\cap \mathbb{R}$$

$$\text{Logo, } A =]-\infty, 2[\cup]8, +\infty[//$$

2) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{3-2k}{2^k} = \frac{2n+1}{2^n} - 1.$$

P(1)

$$\sum_{k=1}^1 \frac{3-2k}{2^k} \stackrel{?}{=} \frac{2 \cdot 1 + 1}{2} - 1$$

" " "

$$\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

P(n) $\Rightarrow$ P(n+1)

Hipótese: $\sum_{k=1}^n \frac{3-2k}{2^k} = \frac{2n+1}{2^n} - 1$, p/ um def. $n \in \mathbb{N}$ fixo

Teste: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3-2k}{2^k} = \frac{2n+3}{2^{n+1}} - 1$, p/ o mesmo def. $n \in \mathbb{N}$ fixo

Prova:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3-2k}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{3-2k}{2^k} + \frac{3-2(n+1)}{2^{n+1}}$$

hip.

$$\frac{2n+1}{2^n} - 1 + \frac{3-2n-2}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{4n+2+1-2n}{2^{n+1}} - 1 = \frac{2n+3}{2^{n+1}} - 1 \quad \checkmark \text{ c.q.d.}$$

3) Seja A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados e não-vazios, tais que $\sup A - \inf B = 1$.
Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$ existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $1 - \varepsilon < a - b \leq 1$.



sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A, b \in B : \begin{cases} \inf B \leq b < \inf B + \varepsilon_{\frac{1}{2}} \\ \sup A - \varepsilon_{\frac{1}{2}} < a \leq \sup A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sup A - \varepsilon_{\frac{1}{2}} < a \leq \sup A \\ -\inf B - \varepsilon_{\frac{1}{2}} < -b \leq -\inf B \end{cases}$$

$$+ \quad \Rightarrow \sup A - \inf B - 2\varepsilon_{\frac{1}{2}} < a - b \leq \sup A - \inf B \Leftrightarrow 1 - 2\varepsilon_{\frac{1}{2}} < a - b \leq 1 \quad \checkmark$$