

1º MINI-TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - LMAC

1º Sem. 2021/22 20/Out/2021 - LMAC - v.1 Duração: 30mn

Número:

Nome:

Curso:

- 1) Represente na forma de um intervalo, ou de uma união disjunta de intervalos, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 1| < |4x - 7|\}.$$

$$|2x+1| < |4x-7|$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 < |4x-7| \quad \wedge \quad 2x+1 > -|4x-7|$$

$$\Leftrightarrow |4x-7| > 2x+1 \quad \wedge \quad |4x-7| > -2x-1$$

$$\Leftrightarrow (4x-7 > 2x+1 \vee 4x-7 < -2x-1) \wedge (4x-7 > -2x-1 \vee 4x-7 < 2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (2x > 8 \vee 6x < 6) \quad \wedge \quad (6x > 6 \vee 2x < 8)$$

$$\Leftrightarrow (x > 4 \vee x < 1) \quad \wedge \quad (x > 1 \vee x < 4)$$

$$\Leftrightarrow x \in (]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[) \cap \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[$$

$$\text{Logo, } A =]-\infty, 1[\cup]4, +\infty[. //$$

2) Use indução para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}.$$

$P(1)$ $\sum_{k=1}^1 \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{1-1}{3^1} \Leftrightarrow \frac{5-2}{3} = 1 \Leftrightarrow 1=1 \quad \checkmark$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Hipótese: $\sum_{k=1}^n \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}$, p/um det. $n \in \mathbb{N}$ fixo

Tese: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n}{3^{n+1}}$, p/ o mesmo det. $n \in \mathbb{N}$ fixo

Prova: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5-2k}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{5-2k}{3^k} + \frac{5-2(n+1)}{3^{n+1}}$

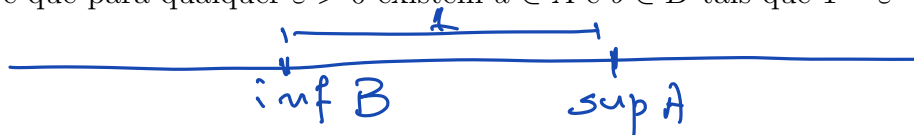
hip. $= 1 + \frac{n-1}{3^n} + \frac{5-2n-2}{3^{n+1}}$

$= 1 + \frac{3n-3+3-2n}{3^{n+1}}$

$= 1 + \frac{n}{3^{n+1}} \quad \checkmark$

c.q.d.

3) Seja A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados e não-vazios, tais que $\sup A - \inf B = 1$.
Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$ existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $1 - \varepsilon < a - b \leq 1$.



sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A, b \in B : \begin{cases} \inf B \leq b < \inf B + \varepsilon_{\frac{1}{2}} \\ \sup A - \varepsilon_{\frac{1}{2}} < a \leq \sup A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sup A - \varepsilon_{\frac{1}{2}} < a \leq \sup A \\ -\inf B - \varepsilon_{\frac{1}{2}} < -b \leq -\inf B \end{cases}$$

+ $\Rightarrow \sup A - \inf B - 2\varepsilon_{\frac{1}{2}} < a - b \leq \sup A - \inf B \Leftrightarrow 1 - 2\varepsilon_{\frac{1}{2}} < a - b \leq 1 \quad \checkmark$