Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Época de Recurso de Cálculo Diferencial e Integral I

Cursos: LMAC, MEBiom, MEFT, LEMat, LEAN, MEQ, MEAmbi, MEBiol

1º Sem. 2014/15   26/1/2015   Duração: 1h30m + 1h30m   Versão A

1º TESTE

(2,0 val.) **Problema 1** Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} :\ \arctan|x^2-3| \leqslant \pi/4\}$.

(a) Mostre que $A = \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right]$.

(b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \mathbb{Q}^+$ e $A \cap (\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}^-)$, onde $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^- = \mathbb{R}^- \cap \mathbb{Q}$.

(2,0 val.) **Problema 2** Use indução para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k\big((-1)^k k + 1\big) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(4,5 val.) **Problema 3** Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/7} \frac{\operatorname{sen}(7x)}{x(x-\pi/7)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1/x)}{\log|x|+5}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2-5\right)^{1/\log(x)}$

(3,5 val.) **Problema 4** Seja $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ a função contínua no ponto zero tal que

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{arcsen}(x)}{x^2},\ \forall\, x \in [-1,1] \setminus \{0\}.$$

(a) Mostre que $f(0) = 0$ e que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = -1/6$.

(b) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 0$.

(c) Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(2) = 0$ e $g'(2) = 3$. Calcule $(f \circ g)'(2)$.

(5,0 val.) **Problema 5** Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(e^x + 3)$.

(a) Mostre que f é invertível e determine o domínio da sua inversa f^{-1}.

(b) Justifique que f^{-1} é diferenciável e determine $(f^{-1})'(f(5))$.

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.

(d) Esboce os gráficos de f e f^{-1}.

(3,0 val.) **Problema 6** Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada estritamente crescente.

(a) Mostre que f não tem máximo.

(b) Mostre por meio dum exemplo que f pode não ter mínimo.

(c) Mostre que se f tem mínimo então

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

$2^{\underline{o}}$ TESTE

(2,5 val.) **Problema 7** Determine a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabendo que $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = (x+2)\,\mathrm{sen}(x) + x\,\mathrm{sen}(x^2+3)$$

(3,0 val.) **Problema 8** Use uma substituição para mostrar que

$$\int_3^8 \frac{\mathrm{d}x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \int_2^3 \frac{2u\,\mathrm{d}u}{(u^2-1)(u+1)}$$

e aproveite para calcular o integral.

(1,5 val.) **Problema 9** Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_2^{\mathrm{senh}\, x} \frac{\mathrm{d}t}{t^8+2t^4+1}$$

Justifique que f é diferenciável e calcule a sua derivada.

(2,0 val.) **Problema 10** Calcule a área da região contendo o ponto $(1,2)$ e limitada pelas curvas $y = 1/x$, $y = x^2$ e $y = 4$.

(4,5 val.) **Problema 11** Determine a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^{n-3}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+4\log n)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)+\sqrt{n+5}}{n^2+7}$

(3,5 val.) **Problema 12** Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{4^n\sqrt{n+3}}$$

(a) Determine o maior intervalo aberto no qual a série é absolutamente convergente.
(b) Diga justificando se a série é simplesmente convergente nalgum ponto.
(c) Seja f a função definida por esta série de potências. Justifique que $1/\sqrt{3} - 1/8 < f(1) < 1/\sqrt{3}$.

(2,0 val.) **Problema 13** Considere a função $f(x) = 3x^2\,\mathrm{sen}(2x)$.

(a) Determine a série de Taylor de f na origem.
(b) Seja $p(x)$ o polinómio de Taylor de ordem 6 de f na origem. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-p(x)}{x^7}$$

(1,0 val.) **Problema 14** Dados polinómios $p(x)$ e $q(x)$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$, use o polinómio de Taylor de p/q em a para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem constantes $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ tais que a função racional dada por

$$\frac{p(x)}{q(x)(x-a)^n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

é prolongável por continuidade a $x = a$.