Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Época de Recurso de Cálculo Diferencial e Integral I

Cursos: LMAC, MEBiom, MEFT, LEMat, LEAN, MEQ, MEAmbi, MEBiol

1º Sem. 2014/15 26/1/2015 Duração: 1h30m + 1h30m Versão A

1º TESTE

(2,0 val.) **Problema 1** Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} :\ \arctan|x^2-3| \leqslant \pi/4\}$.

(a) Mostre que $A = \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right]$.
Res: Como $\pi/4 = \arctan 1$ e a função arcotangente é crescente, temos que

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-3| \leqslant 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leqslant x^2 \leqslant 4\} = \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right].$$

(b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap \mathbb{Q}^+$ e $A \cap (\mathbb{R}^- \backslash \mathbb{Q}^-)$, onde $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^- = \mathbb{R}^- \cap \mathbb{Q}$.
Res: $\sup A \cap \mathbb{Q}^+ = 2 = \max A \cap \mathbb{Q}^+$, $\inf A \cap \mathbb{Q}^+ = \sqrt{2}$, o conjunto não tem mínimo.
$\sup A \cap (\mathbb{R}^- \backslash \mathbb{Q}^-) = -\sqrt{2} = \max A \cap (\mathbb{R}^- \backslash \mathbb{Q}^-)$, $\inf A \cap (\mathbb{R}^- \backslash \mathbb{Q}^-) = -2$, o conjunto não tem mínimo.

(2,0 val.) **Problema 2** Use indução para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k\big((-1)^k k+1\big) = 0\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Res: Para $n = 1$ temos:

$$\sum_{k=1}^{2-1} k\big((-1)^k k+1\big) = 1(-1+1) = 0.$$

Assumindo que para um dado $n \in \mathbb{N}$ se tem que

$$\sum_{k=1}^{2n-1} k\big((-1)^k k+1\big) = 0$$

temos que mostrar que

$$\sum_{k=1}^{2n+1} k\big((-1)^k k+1\big) = 0.$$

Por definição de somatório e pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1} k\big((-1)^k k+1\big) &= \sum_{k=1}^{2n-1} k\big((-1)^k k+1\big) + 2n\big((-1)^{2n}2n+1\big) + (2n+1)\big((-1)^{2n+1}(2n+1)+1\big) \\ &= 0 + 2n(2n+1) + (2n+1)(-(2n+1)+1) = 0.\end{aligned}$$

(4,5 val.) **Problema 3** Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/7} \frac{\operatorname{sen}(7x)}{x(x-\pi/7)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1/x)}{\log|x|+5}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2-5\right)^{1/\log(x)}$

Res:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/7}\frac{\operatorname{sen}(7x)}{x(x-\pi/7)} &= \lim_{x\to\pi/7}\frac{\operatorname{sen}(7(x-\pi/7)+\pi)}{x(x-\pi/7)}\\ &= -\lim_{x\to\pi/7}\frac{\operatorname{sen}(7(x-\pi/7))}{x(x-\pi/7)} = -7\lim_{x\to\pi/7}\frac{\operatorname{sen}(7(x-\pi/7))}{7x(x-\pi/7)} = -\frac{49}{\pi}.\end{aligned}$$

Res:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1.$$

Res: Como a função arcotangente é limitada e $\lim_{x\to0}\log|x| = -\infty$, temos pelo princípio do encaixe que

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan(1/x)}{\log|x|+5} = 0.$$

Res: Como temos uma indeterminação do tipo ∞^0,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-5\right)^{1/\log(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log(x^2-5)}{\log(x)}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2-5)}{\log(x)}}$$

e aplicando a Regra de Cauchy temos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2-5)}{\log(x)} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-5} = 2,$$

pelo que o limite pedido é

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-5\right)^{1/\log(x)} = e^2.$$

(3,5 val.) **Problema 4** Seja $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ a função contínua no ponto zero tal que

$$f(x) = \frac{x-\operatorname{arcsen}(x)}{x^2},\ \forall x\in[-1,1]\setminus\{0\}.$$

(a) Mostre que $f(0)=0$ e que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = -1/6$.
Res: Sendo f contínua em $x=0$, então $f(0) = \lim_{x\to0} f(x)$. Por aplicação sucessiva da Regra de Cauchy temos:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arcsen}(x)}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to0}\frac{1-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2x} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} -\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

De forma semelhante,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arcsen}(x)}{x^3} = -\frac{1}{6} = f'(0).$$

(b) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f em $x=0$.
Res: A recta tangente ao gráfico em $x=0$ tem como equação

$$y = f(0)+f'(0)(x-0) = -\frac{x}{6}.$$

(c) Seja $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(2)=0$ e $g'(2)=3$. Calcule $(f\circ g)'(2)$.
Res: Pela regra da derivada da função composta,

$$(f\circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = 3f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

(5,0 val.) **Problema 5** Considere a função $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\log(e^x+3)$.

(a) Mostre que f é invertível e determine o domínio da sua inversa f^{-1}.
Res: f é invertível visto ser injectiva (é estritamente crescente). O seu domínio é o contradomínio de f e este, atendendo às propriedades das funções exponencial e logaritmo é $f(\mathbb{R}) =]\log(3), +\infty[$.

(b) Justifique que f^{-1} é diferenciável e determine $(f^{-1})'(f(5))$.
Res: f^{-1} é diferenciável no seu domínio visto f ser diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+3} \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pela regra da derivada da função inversa,

$$(f^{-1})'(f(5)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(5)))} = \frac{1}{f'(5)} = \frac{e^5+3}{e^5}.$$

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
Res: Assímptota à esquerda: como $\lim_{x\to-\infty}\log(e^x+3) = \log(3)$, temos uma assímptota horizontal de equação $y=\log(3)$.
Assímptota à direita: pela Regra de Cauchy,

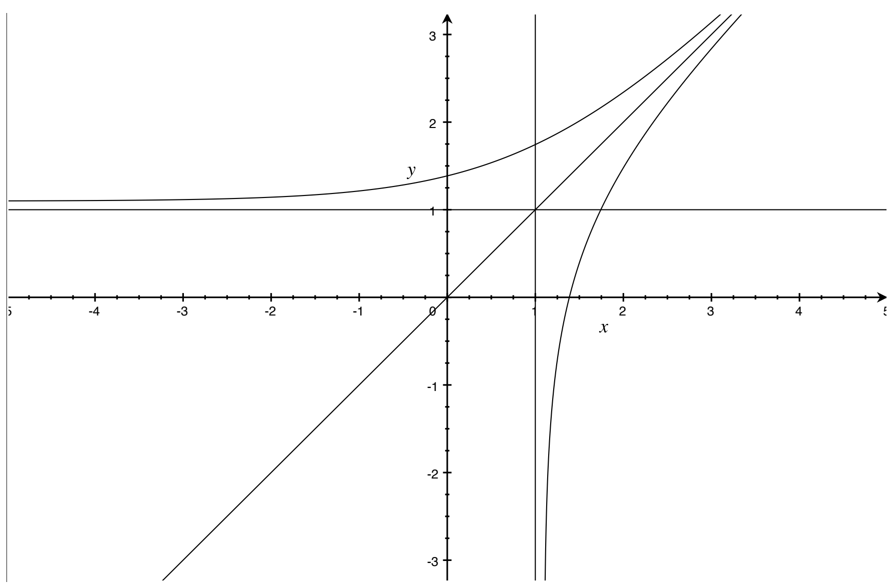
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^x+3)}{x} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+3} = 1.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to+\infty}\log(e^x+3) - x = +\infty-\infty \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{e^x+3}{e^x}\right) = \log(1) = 0,$$

pelo que a assímptota à direita tem equação $y=x$.

(d) Esboce os gráficos de f e f^{-1}.



(3,0 val.) **Problema 6** Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada estritamente crescente.

(a) Mostre que f não tem máximo.
Res: Supondo que tem um máximo em $c \in \mathbb{R}$, então como f é diferenciável em c concluímos que $f'(c) = 0$. Por outro lado, sendo f' estritamente crescente em $\mathbb{R}$, temos que $f'(x) < 0$ para $x < c$ e $f'(x) > 0$ para $x > c$, pelo que f é estritamente decrescente para $x \leqslant c$ e estritamente crescente para $x \geqslant c$. Logo f terá um mínimo em c, uma contradição.

(b) Mostre por meio dum exemplo que f pode não ter mínimo.
Res: $f(x) = e^x$.

(c) Mostre que se f tem mínimo então

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Res: Supondo que f tem um mínimo em $m \in \mathbb{R}$, temos que $f'(m) = 0$. Fixenos $a > m$. Como f' é estritamente crescente, temos que $f'(a) > 0$. Dado $x > a$ arbitrário, pelo Teorema de Lagrange temos que existe $c \in]a, x[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c).$$

Como f' é estritamente crescente, temos que $f'(c) > f'(a)$ e portanto

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)\,,\ \forall x > a.$$

Como $\lim_{x \to +\infty}(f(a) + f'(a)(x - a)) = +\infty$, concluimos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Similarmente se mostra que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$2^{\underline{o}}$ TESTE

(2,5 val.) **Problema 7** Determine a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabendo que $f(0) = 0$ e

$$f'(x) = (x + 2)\operatorname{sen}(x) + x\operatorname{sen}(x^2 + 3)$$

Res: Como, primitivando por partes

$$\int (x+2)\operatorname{sen}(x) = -(x+2)\cos(x) + \int \cos(x) = -(x+2)\cos(x) + \operatorname{sen}(x),$$

e (primitiva imediata)

$$\int x\operatorname{sen}(x^2 + 3) = -\frac{1}{2}\cos(x^2 + 3),$$

temos que

$$f(x) = -(x+2)\cos(x) + \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}\cos(x^2 + 3) + c,$$

e a condição $f(0) = 0$ determina $c = 2 + \frac{1}{2}\cos(3)$.

(3,0 val.) **Problema 8** Use uma substituição para mostrar que

$$\int_3^8 \frac{\mathrm{d}x}{x\left(\sqrt{x+1} + 1\right)} = \int_2^3 \frac{2u\,\mathrm{d}u}{(u^2 - 1)(u + 1)}$$

e aproveite para calcular o integral.

Res: Fazendo a substituição $u = \sqrt{x+1}$ ($x = u^2 - 1$, $dx = 2udu$) obtemos imediatamente a igualdade indicada. Decompondo em fracções simples

$$\frac{2u}{(u^2-1)(u+1)} = -\frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{2(u-1)},$$

e portanto

$$\int \frac{2u}{(u^2-1)(u+1)} = -\frac{1}{2}\log|u+1| - \frac{1}{(u+1)} + \frac{1}{2}\log|u-1|.$$

O integral pedido, por aplicação da Regra de Barrow, é portanto igual a:

$$\int_2^3 \frac{2u\,\mathrm{d}u}{(u^2-1)(u+1)} = \frac{1}{2}\left(\log(3) - \log(4)\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log(2) = \frac{1}{2}\log(3/2) + \frac{1}{12}.$$

(1,5 val.) **Problema 9** Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_2^{\operatorname{senh} x} \frac{\mathrm{d}t}{t^8 + 2t^4 + 1}$$

Justifique que f é diferenciável e calcule a sua derivada.

Res: f é diferenciável porque é a composta da função $\Phi(y) = \int_2^y \frac{\mathrm{d}t}{t^8+2t^4+1}$, que é diferenciável pelo teorema Fundamental do Cálculo (integral indefinido de uma função contínua) com a função $y = \operatorname{senh} x$. Pelo T. Fundamental do Cálculo e pela regra da derivação das funções compostas temos que

$$f'(x) = \frac{\cosh x}{(\operatorname{senh} x)^8 + 2(\operatorname{senh} x)^4 + 1}.$$

(2,0 val.) **Problema 10** Calcule a área da região contendo o ponto $(1,2)$ e limitada pelas curvas $y = 1/x$, $y = x^2$ e $y = 4$.

Res: As curvas $y = 4$ e $y = 1/x$ intersectam-se em $x = 1/4$. As curvas $y = 1/x$ e $y = x^2$ intersectam-se em $x = 1$ e as curvas $y = x^2$ e $y = 4$ intersectam-se em $x = -2, 2$. A área pedida é dada por:

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 (4 - \frac{1}{x})\,dx + \int_1^2 (4 - x^2)\,dx = 4(2 - 1/4) - (\log(4) + 7/3) = \frac{14}{3} - \log(4).$$

(4,5 val.) **Problema 11** Determine a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^{n-3}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+4\log n)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n) + \sqrt{n+5}}{n^2+7}$

Res: Note-se que todas as séries em questão são de termos não negativos. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^{n-3}}$$

é absolutamente convergente pelo critério da razão uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)+2)2^{n-3}}{2^{(n+1)-3}(n+2)} = \frac{1}{2} < 1.$$

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+4\log n)^2}$$

é absolutamente convergente pelo critério integral uma vez que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(3+4\log(x))^2}\,dx := \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x(3+4\log(x))^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3+4\log(b)}\right] = \frac{1}{12}.$$

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)+\sqrt{n+5}}{n^2+7}$$

é absolutamente convergente pelo critério da comparação uma vez que e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\arctan(n)+\sqrt{n+5}}{n^2+7}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1.$$

(3,5 val.) **Problema 12** Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{4^n\sqrt{n+3}}$$

(a) Determine o maior intervalo aberto no qual a série é absolutamente convergente.
Res: A série é absolutamente convergente em $]-R,R[$ onde

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n+1}\sqrt{n+4}}{4^n\sqrt{n+3}} = 4.$$

(b) Diga justificando se a série é simplesmente convergente nalgum ponto.
Res: Para $x=-4$ temos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}},$$

que é divergente (série de Dirichlet com expoente $1/2$). Para $x=4$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}},$$

que é uma série alternada simplesmente convergente pelo critério de Leibniz uma vez que a função $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ é decrescente com $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

(c) Seja f a função definida por esta série de potências. Justifique que $1/\sqrt{3}-1/8 < f(1) < 1/\sqrt{3}$.
Res: Temos que $f(1)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, para $a_n = \frac{(-1)^n}{4^n\sqrt{n+3}}$. Como a função $h(x)=\frac{1}{4^x\sqrt{x+3}}$ é estritamente decrescente para $x\in[0,+\infty[$, temos que

$$f(1) = a_0 + (a_1+a_2) + \ldots (a_{2n-1}+a_{2n}) + \ldots,$$

onde $(a_{2n-1}+a_{2n}) < 0$, $\forall n \geqslant 1$. Como $a_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ temos então que

$$f(1) < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Similarmente, note-se que $(a_{2n}+a_{2_n+1}) > 0$, para $n\geqslant 1$, e $f(1)=(a_0+a_1)+(a_2+a_3)+\ldots$, pelo que

$$f(1) > a_0 + a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8}.$$

(2,0 val.) **Problema 13** Considere a função $f(x) = 3x^2\,\mathrm{sen}(2x)$.

(a) Determine a série de Taylor de f na origem.

Res: Atendendo ao desenvolvimento em série de Taylor na origem de $\operatorname{sen}(x)$ temos que

$$f(x) = 3x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+3}}{(2n+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Seja $p(x)$ o polinómio de Taylor de ordem 6 de f na origem. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^7}$$

Res: Atendendo ao desenvolvimento obtido na alína anterior temos imediatamente que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^7} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+3}}{x^7 (2n+1)!} = \frac{3 \cdot 2^5}{5!}.$$

(1,0 val.) **Problema 14** Dados polinómios $p(x)$ e $q(x)$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$, use o polinómio de Taylor de p/q em a para mostrar que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ tais que a função racional dada por

$$\frac{p(x)}{q(x)(x-a)^n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

é prolongável por continuidade a $x = a$.

Res: Comecemos por notar que a hipótese $q(a) \neq 0$ implica que $\frac{p}{q}$ admite derivada de qualquer ordem numa vizinhança do ponto a. Seja $P_{n.a}$ o polinómio de Taylor de grau n de $\frac{p}{q}$ em torno do ponto a e $R_{n,a}$ o correspondente resto. Temos então que

$$\lim_{x\to a} \left[\frac{p(x)}{q(x)(x-a)^n} - \frac{P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} \right] = \lim_{x\to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Como $P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$, escolhendo $A_1 = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$, $A_2 = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}$, $\ldots$, $A_n = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{(0)}(a)}{0!}$, temos que

$$\lim_{x\to a} \left[\frac{p(x)}{q(x)(x-a)^n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-a)^k} - \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{(n)}(a)}{n!} \right] = 0,$$

e portanto

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{p(x)}{q(x)(x-a)^n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-a)^k} \right) = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{(n)}(a)}{n!},$$

ou seja

$$\frac{p(x)}{q(x)(x-a)^n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

é prolongável por continuidade ao ponto $x = a$.