Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

$2^{\underline{o}}$ TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
(LEMat, LEAN, MEBiol, MEQ, MEAmbi, MEAero, LMAC, MEFT, MEBiom)
$1^{\underline{o}}$ Sem. 2014/15 05/Jan/2014 Duração: 1h30mn

VERSÃO A

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções: (4,5 val.)

(a) $\dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)+5}}$ (b) $\dfrac{x+3}{(x^2+3)(x-1)}$ (c) $\arctan(5x)$

2. Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas: (1,5 val.)

$$y = e^{|x|} - 1 \quad \text{e} \quad y = 3\,.$$

3. Determine a natureza das séries seguintes e calcule a soma de uma delas: (4,5 val.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2 + 1/\log(n)}{n^2-3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^{n-1}}{4^{n+1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n(1+(-1)^n)}{n! + 2^n}$

4. Considere a função f definida pela série de potências: (3,5 val)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+2}}(3x+1)^n$$

(a) Determine para que valores de x a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

(b) Determine $f^{(10)}(-1/3)$.

5. Seja $f \in C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de ordem 4 no ponto $a = 1$ dado por (2,5 val.)

$$p_{4,1}(x) = 2 - 3(x-1)^4\,.$$

(a) Determine se f tem ou não um extremo local no ponto 1.

(b) Sabendo que $0 \leq f^{(5)}(x) \leq 2x\,,\ \forall x \geq 1$, mostre que $|f(2)+1| \leq 4/5!$.

6. Seja $F\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por: (2,0 val.)

$$F(x) = \int_1^x \frac{|\operatorname{sen}(t)|}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

(a) Justifique que F é diferenciável e crescente em todo o seu domínio.

(b) Mostre que F é uma função limitada.

7. Seja $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função tal que $0 \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \geq 0$ e uma dada constante $M > 0$. Considere a função $F\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida pelo integral superior (1,5 val.)

$$F(x) = \overline{\int_0^x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(a) Dados $0 \leq x \leq y$ e sendo P_1 uma partição de $[0,x]$ e P_2 uma partição de $[x,y]$, mostre que as correspondentes somas superiores $U(f,P_1)$ e $U(f,P_2)$ satisfazem a desigualdade

$$U(f,P_1) + U(f,P_2) \geq F(y)\,.$$

(b) Mostre que $F(y) \leq F(x) + M\,(y-x)$ para quaisquer $0 \leq x \leq y$.