Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

# 2º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
# (LEMat, LEAN, MEBiol, MEQ, MEAmbi, MEAero, LMAC, MEFT, MEBiom)
# 1º Sem. 2014/15 05/Jan/2015 Duração: 1h30mn Resolução da versão A

**1.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções: (4,5 val.)

(a) $\dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)+5}}$ (b) $\dfrac{x+3}{(x^2+3)(x-1)}$ (c) $\arctan(5x)$

**Res:**

(a) $P\left(\dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)+5}}\right) = 2\sqrt{\tan(x)+5}$.

(b) Para calcular uma primitiva de $\frac{x+3}{(x^2+3)(x-1)}$ decompondo em fracções simples, temos:

$$\frac{x+3}{(x^2+3)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+3},$$

e verifica-se que $A = 1,\ B = -1, C = 0$. Portanto,

$$P\left(\frac{x+3}{(x^2+3)(x-1)}\right) = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+3)$$

(c) Primitivando por partes,

$$\begin{aligned} P(\arctan(5x)) &= x\arctan(5x) - P\left(\frac{5x}{1+(5x)^2}\right) \\ &= x\arctan(5x) - \frac{1}{10}P\left(\frac{50x}{1+25x^2}\right) \\ &= x\arctan(5x) - \frac{1}{10}\log(1+25x^2)\,. \end{aligned}$$

**2.** Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas: (1,5 val.)

$$y = e^{|x|} - 1 \quad \text{e} \quad y = 3\,.$$

**Res:**

Atendendo a que a função $y = e^{|x|} - 1$ é par, e que $e^x - 1 = 3$ em $x = \log(4)$ temos que a área pedida é dada por:

$$A(D) = 2\int_0^{\log(4)} 3 - (e^x - 1)\,dx = 8\log(4) - 6.$$

**3.** Determine a natureza das séries seguintes e calcule a soma de uma delas: (4,5 val.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2+1/\log(n)}{n^2-3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^{n-1}}{4^{n+1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n(1+(-1)^n)}{n!+2^n}$

**Res:**

(a) Como

$$\frac{2+1/\log(n)}{n^2-3} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{2+1/\log(n)}{1-3/n^2}$$

concluímos pelo critério da comparação que a série indicada é convergente (é da mesma natureza que a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^2}$).
(b) Trata-se da soma de duas séries geométricas com razões respectivamente $r_1 = \frac{3}{4}$ e $r_2 = -\frac{1}{2}$ e portanto convergentes visto $|r_i| < 1,\ i = 1, 2$. É portanto uma série convergente e a sua soma é dada por:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^{n-1}}{4^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{16}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{19}{24}.$$

(c) Trata-se de uma série de termos não negativos. Podemos estudar a natureza da série de termo geral

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^n}{n! + 2^n},$$

e, caso esta seja convergente, pelo critério da comparação a série indicada será também convergente. Pelo critério da razão temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2e^{n+1}}{(n+1)! + 2^{n+1}}\right)\left(\frac{n! + 2^n}{2e^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} e\left(\frac{n! + 2^n}{(n+1)! + 2^{n+1}}\right) = 0,$$

pelo que podemos de facto concluir que a série indicada é convergente.

(3,5 val) **4.** Considere a função $f$ definida pela série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+2}}(3x+1)^n$$

(a) Determine para que valores de $x$ a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

**Res:**

Calculando o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} \frac{\sqrt{(n+1)^4+2}}{(n+1)} = 1,$$

temos que a série é absolutamente convergente em $\{x : |3x+1| < 1\} = ]-\frac{2}{3}, 0[$ e divergente em $\mathbb{R}\backslash[-\frac{2}{3}, 0]$, faltando analisar o que se passa em $x = 0$ e $x = -\frac{2}{3}$. Em $x = 0$ temos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ que é divergente, por comparação com a série harmónica. Em $x = -\frac{2}{3}$ temos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ que é simplesmente convergente pelo critério de Leibniz visto que $\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ é uma sucessão decrescente (a derivada da função $\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ é positiva para $x \geq 1$) e convergente para zero.

(b) Determine $f^{(10)}(-1/3)$.

**Res:**

A série de Taylor de $f$ em torno do ponto $-\frac{1}{3}$ obtém-se facilmente a partir da definição de $f$ como série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+2}}(3x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} 3^n (x+\tfrac{1}{3})^n$$

Assim, temos que

$$a_n := \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} 3^n = \frac{f^{(n)}(-\frac{1}{3})}{n!}.$$

Logo

$$f^{(10)}(-1/3) = 10! \cdot 10 \cdot 3^{10}/\sqrt{10002}.$$

**5.** Seja $f \in C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de ordem 4 no ponto $a = 1$ dado por (2,5 val.)

$$p_{4,1}(x) = 2 - 3(x-1)^4.$$

(a) Determine se $f$ tem ou não um extremo local no ponto 1.

**Res:**

Como $p_{4,1}(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$, concluímos que $f^k(1) = 0$ para $k = 1, 2, 3$. Como a primeira derivada (de ordem superior à primeira) que não se anula em $x = 1$ é a de ordem 4 (par) e $f^{(4)}(1) = -3 \cdot 4! < 0$, concluímos que $f$ tem um máximo local em $x = 1$.

(b) Sabendo que $0 \le f^{(5)}(x) \le 2x\,,\ \forall x \ge 1$, mostre que $|f(2)+1| \le 4/5!$.

**Res:**

Tendo em conta que $f(2)+1 = f(2) - p_{4,1}(2)$, podemos usar a fórmula de Taylor com resto integral para obter

$$f(2)+1 = r_{4,1}(2) \quad \text{com} \quad r_{4,1}(x) = \int_1^x \frac{f^{(5)}(t)}{4!}(x-t)^4\, dt.$$

Atendendo a que $0 \le f^{(5)}(t) \le 2t \le 2x$, para todo o $1 \le t \le x$, e à monotonia do integral, temos então que, para $x \ge 1$,

$$|r_{4,1}(x)| \le \left| \int_1^x \frac{2x(x-t)^4}{4!}\, dt \right| \le \frac{2x}{4!}\frac{|x-1|^5}{5},$$

e fazendo $x = 2$ obtemos a estimativa indicada.

**6.** Seja $F\colon [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ a função definida por: (2,0 val.)

$$F(x) = \int_1^x \frac{|\operatorname{sen}(t)|}{t(1+t)}\, \mathrm{d}t.$$

(a) Justifique que $F$ é diferenciável e crescente em todo o seu domínio.

**Res:**

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, como $f(t) = \frac{|\operatorname{sen}(t)|}{t(1+t)}$ é uma função contínua, a função $F$ é diferenciável. Como $F'(x) = f(x) \ge 0$, $\forall x \ge 1$, concluímos também que $F$ é crescente.

(b) Mostre que $F$ é uma função limitada.
**Res:**
Temos que, para $x \geq 1$,

$$|F(x)| = \left| \int_1^x \frac{|\operatorname{sen}(t)|}{t(1+t)} \, dt \right| \leq \int_1^x \frac{1}{t^2} \, dt = 1 - \frac{1}{x} \leq 1.$$

(1,5 val.) **7.** Seja $f\colon [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ uma função tal que $0 \leq f(x) \leq M$, para todo o $x \geq 0$ e uma dada constante $M > 0$. Considere a função $F\colon [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida pelo integral superior

$$F(x) = \overline{\int_0^x} f(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

(a) Dados $0 \leq x \leq y$ e sendo $P_1$ uma partição de $[0, x]$ e $P_2$ uma partição de $[x, y]$, mostre que as correspondentes somas superiores $U(f, P_1)$ e $U(f, P_2)$ satisfazem a desigualdade

$$U(f, P_1) + U(f, P_2) \geq F(y) \, .$$

**Res:**
Temos que $P = P_1 \cup P_2$ é uma partição do intervalo $[0, y]$ e que $U(f, P) = U(f, P_1) + U(f, P_2)$ Como $\overline{\int_0^y} f(t) \, dt = \inf\{U(f, P),\ P$ partição de $[0, y]\}$ temos imediatamente a desigualdade indicada.

(b) Mostre que $F(y) \leq F(x) + M\,(y - x)$ para quaisquer $0 \leq x \leq y$.
**Res:**
Como pela alínea anterior $F(y) \leq U(f, P_1) + U(f, P_2)$, para partições $P_1$ do intervalo $[0, x]$ e $P_2$ do intervalo $[x, y]$, e como, atendendo à hipótese $0 \leq f(x) \leq M$ e à definição de soma superior se tem que

$$U(f, P_2) \leq M(y - x),$$

temos que

$$F(y) \leq U(f, P_1) + M(y - x),$$

para qualquer partição $P_1$ e a desigualdade mantêm-se quando tomamos o ínfimo das somas superiores no intervalo $[0, x]$.