Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - 8 de Novembro de 2014 - 12h00m (Versão 2)

Cursos: LMAC, MEBiom, MEFT, LEMat, LEAN, MEQ, MEAmbi, MEBiol

(2,0 val.) **Problema 1** Considere a função $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{2-x^2} + \ln(1-x)$.

(a) Mostre que o domínio de f é o conjunto $D_f = \left[-\sqrt{2}, 1\right[$.
(b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de D_f e de $D_f \cap \mathbb{Q}$.

(3,5 val.) **Problema 2** Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2-9}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(e^x)\big(\cos(1/x)-1\big)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(1-\frac{3}{\ln x}\right)^{\ln x}$

(3,0 val.) **Problema 3** Considere a função $f\colon [-1,1[\, \to \mathbb{R}$ definida no seu domínio por:

$$f(x) = (x+1)\sqrt{\cos\left(\pi x^3/2\right)}$$

(a) Calcule a derivada à direita de f no ponto $x=-1$ usando a definição de derivada.
(b) Calcule $f'(x)$ para $x \neq -1$.
(c) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f em $x=0$.

(4,5 val.) **Problema 4** Considere a função $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6x - 1 - \ln(x^2)$.

(a) Calcule os limites de f em 0, $-\infty$ e $+\infty$.
(b) Estude a monotonia e a concavidade, determine os extremos e os pontos de inflexão e esboce o gráfico de f.
(c) Mostre por indução que, para qualquer $n \geqslant 2$, a derivada de ordem n de f é:

$$f^{(n)}(x) = 2(-1)^n(n-1)!\,x^{-n}$$

(2,0 val.) **Problema 5** Considere a equação $3x - 7 = \arctan x$.

(a) Mostre que esta equação tem pelo menos uma solução. Sugestão: pode ajudar esboçar os gráficos das funções.
(b) Mostre que esta equação tem exactamente uma solução.

(3,0 val.) **Problema 6** Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos. A tabela seguinte representa alguns valores de f e da sua derivada:

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	4
$f'(x)$	5	3	2

(a) Calcule a derivada da função $g(x) = 2\operatorname{sen}(x) f(x^2+1)$ no ponto $x=1$.
(b) Assumindo que f é injectiva, calcule $(f^{-1})'(2)$.
(c) Mostre que existem pelo menos dois pontos em que $f' = 1$.

(2,0 val.) **Problema 7** Representamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x. Seja $f\colon [1,+\infty[$ a função definida por:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x}{x^2+k}$$

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Sugestão: limites enquadrados.