Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat

1º Sem. 2013/14 27/1/2014 Duração: 1h30m + 1h30m Versão A

1º TESTE

(3,0 val.) **1.** (a) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos cada um dos conjunto seguintes:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x+8| < x^2 - x\right\}, \qquad B = \left\{\log\left(2 + \frac{3}{x}\right) : x > 0\right\}.$$

(b) Indique, justificando, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto:

$$C = \left\{\frac{2}{n} + 3^{-n}, \ \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(2,0 val.) **2.** Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\text{(a)} \ \ \tan\left((x+2)e^{x-3}\right); \qquad \text{(b)} \ \ \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\cosh(1+x^2)}.$$

(4,0 val.) **3.** Calcule em $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{(a)} \ \lim_{x\to -3} \frac{\operatorname{sen}(x+3)}{x^2+5x+6}; \qquad \text{(b)} \ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(7x)}{\arctan(5/x)}; \qquad \text{(c)} \ \lim_{x\to 1} (\log(2-x))^{1-x}.$$

(6,0 val.) **4.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}$ e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 2\operatorname{arcsen}(e^x), & \text{se } x \le 0 \\ \\ \dfrac{\alpha}{x^2+1}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ representa uma constante.

(a) Determine, justificando, o valor da constante α.

(b) Mostre que f não é diferenciável em $x = 0$.

(c) Determine os intervalos de monotonia e os extremos de f.

(d) Indique, justificando, o contradomínio de f e se tem máximo e mínimo absolutos

(e) Justifique que f restringida ao intervalo $]-\infty, 0[$ é invertível com inversa diferenciável. Determine a derivada da função inversa no ponto $f(-1)$.

(3,0 val.) **5.** Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ com $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dada uma constante $a \in \mathbb{R}$, considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}, & \text{se } x \ne a; \\ \\ f'(a), & \text{se } x = a. \end{cases}$$

(a) Justifique que g é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que $g \in C^1(\mathbb{R})$.

(c) Mostre que g tem um mínimo absoluto em $x = a$.

(2,0 val.) **6.** Se $0 \le a_i \le 1$, $i \ge 1$, mostre por indução que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \le a_1 \times \cdots \times a_n + n - 1.$$

2º TESTE

(6,5 val.) **7.** (a) Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$\text{(i)}\ x^2 \operatorname{sen}^2(x^3)\cos(x^3)\ , \qquad \text{(ii)}\ \frac{x^2+16}{(x-2)(x^2+x-6)}\ , \qquad \text{(iii)}\ (x^2+3)e^{x-2}.$$

(b) Calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\, dx\, .$$

Sugestão: considere a substituição $t = \sqrt{x+1}$.

(3,0 val.) **8.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par e diferenciável. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = f(2x) \cdot \int_0^{x/2} f(t)\, dt.$$

(a) Mostre que F é uma função ímpar.

(b) Justifique que F é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Sabendo que $f(0) = 1$, determine o polinómio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = 0$ da função F.

(5,0 val) **9.** Determine a natureza das séries seguintes e calcule a soma de uma delas

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{3^n}\, ; \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (e^{4/n}-1)\, ; \qquad \text{(c) (a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3^{-n}}{5^{n-1}}\, .$$

(2,0 val.) **10.** Determine para que valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+\sqrt{n})}(x+3)^n.$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

(1,5 val.) **11.** Desenvolva $f(x) = \log(3+x)$ em série de potências de $x-5$ indicando o maior intervalo aberto onde o referido desenvolvimento é válido.

(2,0 val.) **12.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

(a) Mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^c f = \frac{1}{2}\int_a^b f\, .$$

(b) Mostre com um exemplo que pode não existir $c \in\,]a, b[$ com a propriedade anterior.