Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
(LEMat, LEAN, MEBiol, MEQ, MEAmbi, MEAero, LMAC, MEFT, MEBiom)
1º Sem. 2013/14 06/Jan/2014 Duração: 1h30mn vspace*0.2cm
VERSÃO B

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções: (4,5 val.)

(a) $\dfrac{x\arctan(x^2)}{2(1+x^4)}$ (b) $\dfrac{13}{(x^2+1)(x-5)}$ (c) $\dfrac{\log(3x)}{x^4}$

2. Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas: (1,5 val.)

$$y = -x^2 - \tfrac{1}{2}, \quad y = 2x + \tfrac{1}{2}, \quad y = -2x + \tfrac{1}{2}.$$

3. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função positiva e contínua. Seja $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por: (3,0 val.)

$$\phi(x) = (x-1)\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Mostre que $\phi(x) \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Justifique que ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule ϕ'.

(c) Determine o polinómio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = 1$ da função ϕ.

4. Determine a natureza das séries: (4,5 val.)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n/3}}{2+3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n + \sqrt{n}}{n^2 + \operatorname{sen} n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+3)2^n}{n!}$

5. Considere a função f definida pela série de potências: (3,5 val)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(3x+1)^n}{2^n(n+1)}$$

(a) Determine para que valores de x a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

(b) Seja $g(x)$ a derivada de $(3x+1)f(x)$. Escreva g como um quociente de polinómios.

6. Escreva a função $f(x) = x/(3+2x)$ como uma série de potências de x e indique o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. (1,5 val.)

7. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Assumindo que existe uma sucessão $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que: (1,5 val.)

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \sup_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq c_n \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 c_n = \ell,\ \ell \in \mathbb{R}^+,$$

mostre que o seguinte limite existe em $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$