

2.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
(LEMat, LEAN, MEBiol, MEQ, MEAmbi, MEAero, LMAC, MEFT, MEBiom)
1.º Sem. 2013/14 06/Jan/2014 Duração: 1h30mn
VERSÃO A

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções: (4,5 val.)

(a) $\frac{x \arctan(x^2)}{3(1+x^4)}$ (b) $\frac{5}{(x^2+1)(x-3)}$ (c) $\frac{\log(2x)}{x^4}$

2. Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas: (1,5 val.)

$$y = x^2 + \frac{1}{2}, \quad y = 2x - \frac{1}{2}, \quad y = -2x - \frac{1}{2}.$$

3. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva e contínua. Seja $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por: (3,0 val.)

$$\phi(x) = (x+1) \int_{-1}^x f(t) \, dt.$$

- (a) Mostre que $\phi(x) \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.
(b) Justifique que ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule ϕ' .
(c) Determine o polinómio de Taylor de ordem 1 no ponto $a = -1$ da função ϕ .

4. Determine a natureza das séries: (4,5 val.)

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n/2}}{3+2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + \log n}{\cos n + n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)3^n}{n!}$

5. Considere a função f definida pela série de potências: (3,5 val)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+1)^n}{3^n(n+1)}$$

- (a) Determine para que valores de x a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.
(b) Seja $g(x)$ a derivada de $(2x+1)f(x)$. Escreva g como um quociente de polinómios.
6. Escreva a função $f(x) = x/(2+3x)$ como uma série de potências de x e indique o maior (1,5 val.) intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.
7. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Assumindo que existe uma sucessão (1,5 val.) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq c_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 c_n = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}^+,$$

mostre que o seguinte limite existe em $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) \, dt.$$