Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

# 1º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A

## LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat

**1º Sem. 2013/14 09/11/2013 Duração: 1h30m**

---

**1.** (2,0 val.)

(i) Seja $A \subset \mathbb{R}$ o conjunto solução da seguinte desigualdade:

$$\frac{\log(x+2)}{3-x^2} \geq 0\,.$$

Mostre que $A = \left]-2, -\sqrt{3}\right[ \cup \left[-1, \sqrt{3}\right[$.

(ii) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, ou justifique que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap [0, +\infty[$.

**2.** (2,0 val.) Use o método de indução para mostrar que $(n+2)! > 4^n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$

**3.** (2,0 val) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\cos(1/x)}{5+\sqrt{x}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{arcsen}(x^{3/2})\,.$$

**4.** (3,0 val.) Calcule os seguintes limites (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x\to+\infty} (1-\cos(1/x))\cdot(1+\operatorname{sen}(e^x)) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}}\,.$$

**5.** (4,0 val.) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2\arctan(x-1) - x$. Esboce o seu gráfico.

**6.** (5,5 val.) Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{x}\,,\ x \neq 0\,, \quad \text{e} \quad g(0) = 3\,.$$

(i) Mostre que $g$ é contínua em $x = 0$.

(ii) Mostre que $g$ é diferenciável em $x = 0$ e $g'(0) = 3/2$.

(iii) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $h'(3) = -2/3$. Determine $(h \circ g)'(0)$.

(iv) Mostre que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(v) Prove que $g$ tem mínimo absoluto.

**7.** (1,5 val.)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e majorada. Prove que existe e é finito o limite de $f$ quando $x \to +\infty$. Sugestão: comece por usar o Axioma do Supremo.