Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat, MEAero

1º Sem. 2012/13 28/1/2013 Duração: 1h30m + 1h30m <u>**Versão A**</u>

1º TESTE

1. (1,5 val.)

(a) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos o conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log(x^2 - x + 1) > 0 \right\}.$$

(b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos seguintes:

$$B = \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n}, \; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = B \cap]0,1].$$

2. (1,0 val.) Recorrendo ao método de indução, mostre que

$$\frac{n!}{2^{n-1}} \geq n - 2, \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq 3.$$

3. (2,0 val.) Calcule em $\overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{\log(x^2)}, \quad \lim_{x \to 0^+} \cos x^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}.$$

4. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\text{(a)} \;\; e^{\operatorname{senh}\left(1+x^3\right)}; \qquad \text{(b)} \;\; \frac{\tan\left(1+x^2\right)}{\log x}.$$

5. (3,5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}$ e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan \sqrt{x}\,, & \text{se } x > 0 \\ \\ \log(x^2 + x + 1)\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(a) Justifique que $f(0) = 0$ e verifique se f é ou não diferenciável no ponto zero.

(b) Determine os intervalos de monotonia, os extremos e o contradomínio de f.

(c) Verifique se existem assímptotas ao gráfico de f.

(d) Justifique que f restringida ao intervalo $]0, +\infty[$ é invertível com inversa diferenciável. Determine a derivada da função inversa no ponto $f(1)$.

6. (1,0 val.) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada crescente. Mostre que, se $a < b$ e $f(a) = f(b)$ então $f(x) \leq f(a) = f(b)$ $\forall x \in]a, b[$.

$2^{\underline{o}}$ TESTE

7. (3.5 val.)

(a) Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$\text{(i)} \ \frac{(\log x)^{\frac{1}{3}}}{5x}, \qquad \text{(ii)} \ \frac{2x+1}{(1-x^2)(1+x)}, \qquad \text{(iii)} \ \frac{1}{x^3}\cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) Calcule

$$\int_{\log(2/3)}^{0} \frac{e^x}{(2-e^x)\sqrt{1-e^x}}\, dx.$$

Sugestão: considere a substituição $t = \sqrt{1-e^x}$.

8. (1.0 val.) Considere a função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{2t}\, dt.$$

(a) Justifique que F é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule F', F''.

(b) Determine um polinómio de 2^{o} grau $p(x)$ tal que $p^{(k)}(\pi) = F^{(k)}(\pi)$, $k = 0, 1, 2$.

9. (2.0 val) Determine a natureza das séries seguintes e calcule a soma de uma delas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n! + 2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}.$$

10. (1.0 val.) Determine para que valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n^2}} (2x-3)^n.$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

11. (1.0 val.) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função cuja derivada é igual a $\frac{1}{x}$ e tal que $f(3) = 1$. Desenvolva f em série de potências de $x-3$, indicando o maior intervalo aberto onde o referido desenvolvimento é válido.

12. (1.5 val.) Seja f uma função positiva e decrescente em $[1, +\infty[$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\, dx.$$

(a) Mostre que

$$A(n) = f(n) \ + \ \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} (f(k) - f(x))\, dx.$$

(b) Justifique que $A(n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e que $A(n)$ é decrescente. Conclua, justificando, que $A(n)$ é uma sucessão convergente com $0 \le \lim A(n) < f(1)$.

(c) Aproveite o resultado da alínea anterior para mostrar que

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

existe e pertence ao intervalo $[0, 1[$.