Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat, MEAero

1º Sem. 2012/13 28/1/2013 Duração: 1h30m + 1h30m <u>**Versão A**</u>

1º TESTE

1. (1,5 val.)

(a) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos o conjunto:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log(x^2 - x + 1) > 0\right\}.$$

Resolução.

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{R} : \log(x^2 - x + 1) > 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 > 1\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) > 0\} \\ &=]-\infty, 0[\, \cup \,]1, +\infty[\quad \text{(0,5 val.)} \end{aligned}$$

□

(b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos seguintes:

$$B = \left\{ \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = B \cap \,]0, 1]\,.$$

Resolução. Tendo em conta que $1/n$ é uma sucessão positiva e decrescente, e $\cos(\frac{n\pi}{2})$ é uma sucessão que só assume os valores -1, 0 e 1, com

$$\cos(1\pi/2) = 0\,,\ \cos(2\pi/2) = -1\,,\ \cos(3\pi/2) = 0 \quad \text{e} \quad \cos(4\pi/2) = 1\,,$$

temos que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\cos(2\pi/2)}{2} = \frac{-1}{2} \leq \frac{\cos(n\pi/2)}{n} \leq \frac{1}{4} = \frac{\cos(4\pi/2)}{4}\,.$$

Assim

$$\inf B = \min B = \frac{-1}{2} \quad \text{e} \quad \sup B = \max B = \frac{1}{4}\,. \quad \text{(0,5 val.)}$$

O conjunto $C = B \cap \,]0, 1]$ apenas contém os valores de $\cos(n\pi/2)/n$ quando $\cos(n\pi/2) = 1$, i.e. quando $n = 4k$ com $k \in \mathbb{N}$, e nesse caso

$$\frac{\cos(n\pi/2)}{n} = \frac{\cos(2k\pi)}{4k} = \frac{1}{4k}\,.$$

Assim, $C = \{1/4k\,,\ k \in \mathbb{N}\}$ e podemos concluir que

$$\inf C = 0\,,\ C \text{ não tem mínimo e } \sup C = \max C = \frac{1}{4}\,. \quad \text{(0,5 val.)}$$

□

2. (1,0 val.) Recorrendo ao método de indução, mostre que

$$\frac{n!}{2^{n-1}} \geq n - 2, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

Resolução. [$P(3)$].

$$\frac{3!}{2^{3-1}} = \frac{3\times 2\times 1}{2\times 2} = \frac{3}{2} \geq 1 = 3-2\,.$$

[$P(n) \Rightarrow P(n+1)$]. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$\frac{n!}{2^{n-1}} \geq n-2 \quad \text{para um dado } 3 \leq n \in \mathbb{N},$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$\frac{(n+1)!}{2^n} \geq n-1 \quad \text{para o mesmo dado } 3 \leq n \in \mathbb{N}.$$

Usando a hipótese temos que

$$\frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+1)}{2}\cdot\frac{n!}{2^{n-1}} \geq \frac{(n+1)(n-2)}{2}\,,$$

pelo que basta mostrar que

$$\frac{(n+1)(n-2)}{2} \geq n-1\,.$$

Como

$$\frac{(n+1)(n-2)}{2} \geq n-1 \Leftrightarrow (n+1)(n-2) \geq 2(n-1) \Leftrightarrow n^2-n-2-2n+2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow n^2-3n \geq 0 \Leftrightarrow n(n-3) \geq 0$$

e esta última desigualdade é claramente verdadeira para $3 \leq n \in \mathbb{N}$, fica provada a validade da tese. $\square$

3. (2,0 val.) Calcule em $\overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{\log(x^2)}, \quad \lim_{x\to 0^+}\cos x^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}\,.$$

Resolução.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = +\infty\cdot 1 = +\infty \quad (0{,}7 \text{ val.})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{\log(x^2)} = \frac{0}{-\infty} = 0 \quad (0{,}5 \text{ val.})$$

Tendo em conta que

$$(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} = e^{\frac{\log(\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)}}\,,\ \forall x \in\,]0,\pi/2[\,,$$

temos que

$$\lim_{x\to 0^+}\cos x^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)}}\,.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \frac{-0}{1} = 0$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0^+}\cos x^{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} = e^0 = 1\,. \quad (0{,}8 \text{ val.})$$

$\square$

4. (1,0 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\text{(a)}\ \ e^{\operatorname{senh}\left(1+x^3\right)}\,; \qquad\qquad \text{(b)}\ \ \frac{\tan\left(1+x^2\right)}{\log x}\,.$$

Resolução.

$$\left(e^{\operatorname{senh}\left(1+x^3\right)}\right)' = e^{\operatorname{senh}\left(1+x^3\right)}\cdot(\operatorname{senh}(1+x^3))' = e^{\operatorname{senh}\left(1+x^3\right)}\cdot(\cosh(1+x^3))\cdot 3x^2 \quad \text{(0,5 val.)}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\tan\left(1+x^2\right)}{\log x}\right)' &= \frac{(\tan(1+x^2))'\cdot\log x-\tan(1+x^2)\cdot(\log x)'}{(\log x)^2}\\ &= \frac{\frac{2x}{\cos^2(1+x^2)}\cdot\log x-\tan(1+x^2)\cdot\frac{1}{x}}{(\log x)^2} \quad \text{(0,5 val.)}\end{aligned}$$

□

5. (3,5 val.) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}$ e definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x\arctan\sqrt{x}\,, & \text{se } x>0\\ \log(x^2+x+1)\,, & \text{se } x<0.\end{cases}$$

(a) Justifique que $f(0)=0$ e verifique se f é ou não diferenciável no ponto zero.

Resolução. (0.5 val.) Uma vez que f é contínua em 0, temos $f(0)=f(0^+)=f(0^-)$. Logo, por ex., $f(0)=\lim_{x\to 0^+} x\arctan\sqrt{x}=0$.
Para vermos se é diferenciável em 0, calculamos

$$f'_d(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\arctan\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\arctan\sqrt{x}=0,$$

$$f'_e(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\log(x^2+x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{1}=1$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeteminação $\frac{0}{0}$). Como $f'_d(0)\neq f'_e(0)$, f não é diferenciável em 0. □

(b) Determine os intervalos de monotonia, os extremos e o contradomínio de f.

Resolução. (1.5 val.) Para $x\neq 0$, temos

$$f'(x)=\begin{cases}\arctan\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}\,, & \text{se } x>0\\[2ex] \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,, & \text{se } x<0.\end{cases}$$

já que

$$\left(x\arctan\sqrt{x}\right)'=\arctan\sqrt{x}+x\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}=\arctan\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$$

$$\big(\log(x^2+x+1)\big)' = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Como $\sqrt{x}>0$, $\arctan\sqrt{x}>0$ e $1+x>0$ para $x>0$, temos que $f'(x)>0$, ou seja, f é (estritamente) crescente em $]0,+\infty[$ e não tem extremos neste intervalo.

Quanto a $x<0$, temos $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1/2$ e $x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$ é impossível, sendo então $x^2+x+1>0$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$. Assim, temos que $f'(x)>0$, se $-1/2<x<0$ e $f'(x)<0$ se $x<-1/2$. Concluímos que f é crescente em $]-1/2,0[$ e decrescente em $]-\infty,-1/2[$, tendo um mínimo em $f(-1/2)=\log\left(\frac{7}{4}\right)$.

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, será crescente em $]-1/2,+\infty[$ e decrescente em $]-\infty,-1/2[$. Conclui-se que $f(-1/2)$ é mínimo absoluto, e não há outros extremos. Para o contradomínio, notando que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\arctan\sqrt{x} = +\infty\cdot\frac{\pi}{2} = +\infty$$

(ou calculando $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$), tem-se do Teorema do Valor Intermédio, que $CD_f=[\log\left(\frac{7}{4}\right),+\infty[$.

□

(c) Verifique se existem assímptotas ao gráfico de f.

Resolução. (1.0 val.) Não há assímptotas verticais, já que f é contínua em $\mathbb{R}$. Como $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, não há assímptotas horizontais. Para determinar se existem asímptotas oblíquas, calculamos

$$m \;=\; \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\arctan\sqrt{x}=\pi/2\in\mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to+\infty} f(x)-\frac{\pi}{2}x \;=\; \lim_{x\to+\infty} x\arctan\sqrt{x}-\frac{\pi}{2}x \;=\; \infty-\infty\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\sqrt{x}-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \;=\; \frac{0}{0} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{2\sqrt{x}(1+x)} \;=\; +\infty\notin\mathbb{R}\end{aligned}$$

(onde usámos a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$) logo não existe assímptota à direita. Quanto a assímptota à esquerda, usando de novo a Regra de Cauchy,

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\log(x^2+x+1)}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{RC}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{1}=0.$$

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x)-0=+\infty\notin\mathbb{R}$, concluimos que também não há assímptota à esquerda.

Logo, não existem assímptotas ao gráfico de f. □

(d) Justifique que f restringida ao intervalo $]0,+\infty[$ é invertível com inversa diferenciável. Determine a derivada da função inversa no ponto $f(1)$.

Resolução. (0.5 val.) Como vimos em (b), f é estritamente crescente em $]0,+\infty[$, logo injectiva, logo invertível. Uma vez que $f'(x)\neq 0$ para $x>0$, f^{-1} é diferenciável.

Tendo em conta que $f'(1) = \arctan 1 + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi+1}{4}$, temos do teorema da derivada da função inversa que

$$(f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(f(1)))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{4}{\pi+1}.$$

□

6. (1,0 val.) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada crescente. Mostre que, se $a < b$ e $f(a) = f(b)$ então $f(x) \leq f(a) = f(b)$ $\forall x \in]a, b[$.

Resolução. Sabemos do Teorema de Weierstrass - já que f, sendo diferenciável, é contínua - que f tem máximo e mínimo no intervalo fechado $[a, b]$. Queremos provar que o máximo é $f(a) = f(b)$.

Do Teorema de Rolle, temos que existe $c \in]a, b[$ com $f'(c) = 0$. Como f' é crescente, temos que para $x < c$, $f'(x) \leq f'(c) = 0$, e para $x > c$, $f'(x) \geq f'(c) = 0$. Temos então que f é decrescente em $[a, c]$ e crescente em $[c, b]$. Em particular, $f(x) \leq f(a) = f(b)$, se $a \leq x \leq c$ e $f(x) \leq f(b) = f(a)$, se $c \leq x \leq b$. Logo, $f(x) \leq f(a) = f(b)$, $\forall x \in]a, b[$. □

2º TESTE

7. (3.5 val.)

(a) Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$\text{(i)}\ \frac{(\log x)^{\frac{1}{3}}}{5x}, \qquad \text{(ii)}\ \frac{2x+1}{(1-x^2)(1+x)}, \qquad \text{(iii)}\ \frac{1}{x^3}\cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

Resolução. (i) (0.5 val.) É uma primitiva (quase) imediata:

$$\int \frac{(\log x)^{\frac{1}{3}}}{5x} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x}(\log x)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{20}(\log x)^{\frac{4}{3}}.$$

(ii) (1.0 val.) É uma primitiva de uma função racional. Usamos a decomposição em fracções simples dada por

$$\frac{2x+1}{(1-x^2)(1+x)} = \frac{2x+1}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2}$$

Temos

$$2x + 1 = A(1+x)^2 + B(1+x)(1-x) + C(1-x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para calcular as constantes A, B, C fazemos, por exemplo,

$$\begin{aligned} x = -1 \quad &\Rightarrow \quad -1 = 2C \quad \Rightarrow \quad C = -1/2 \\ x = 1 \quad &\Rightarrow \quad 3 = 4A \quad \Rightarrow \quad A = 3/4 \\ \text{coef. } x^2 \quad &\Rightarrow \quad A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 3/4. \end{aligned}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{(1-x^2)(1+x)} = dx \quad &= \quad \int \frac{3/4}{1-x} + \frac{3/4}{1+x} + \frac{-1/2}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \quad -\frac{3}{4}\log|1-x| + \frac{3}{4}\log|1+x| + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

(iii) (1.0 val.) Primitivando por partes com $u'(x) = \frac{1}{x^2}\cosh\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow u(x) = -\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right)$ e $v(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow v'(x) = -\frac{1}{x^2}$, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3}\cosh\left(\frac{1}{x}\right)dx &= \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\cosh\left(\frac{1}{x}\right)dx \\
&= -\frac{1}{x}\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x^2}(-\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right))\,dx \\
&= -\frac{1}{x}\operatorname{senh}\left(\frac{1}{x}\right) + \cosh\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

(Alternativamente, fazendo a substituição $t = \frac{1}{x}$, com $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$, a primitiva fica

$$\int \frac{1}{x^3}\cosh\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int t^3\cosh(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int t\cosh t\,dt$$

que pode então obter-se por partes.)

□

(b) Calcule

$$\int_{\log(2/3)}^{0} \frac{e^x}{(2-e^x)\sqrt{1-e^x}}\,dx.$$

Sugestão: considere a substituição $t = \sqrt{1-e^x}$.

Resolução. (1.0 val.) Fazendo $t = \sqrt{1-e^x} \Leftrightarrow e^x = 1-t^2 \Leftrightarrow x = \log(1-t^2)$, temos

$$x = \log(2/3) \Leftrightarrow t = \sqrt{1-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$x = 0 \Leftrightarrow t = 0,$$

e $\frac{dx}{dt} = \frac{-2t}{1-t^2}$. O integral pedido fica

$$\begin{aligned}
\int_{\log(2/3)}^{0} \frac{e^x}{(2-e^x)\sqrt{1-e^x}}\,dx &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{0} \frac{1-t^2}{(2-1+t^2)\,t}\,\frac{-2t}{1-t^2}\,dt = \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \left[2\arctan t\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

□

8. (1.0 val.) Considere a função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{2t}\,dt.$$

(a) Justifique que F é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule F', F''.

Resolução. (0.5 val.) F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, já que é dada pela composta do integral indefinido da função contínua $t \mapsto \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{2t}$ em $\mathbb{R}^+$, que é diferenciável pelo Teorema Fundamental do Cálculo, com a função $\sqrt{x}$, diferenciável em $\mathbb{R}^+$. A sua derivada é dada por

$$F'(x) = (\sqrt{x})'\frac{\operatorname{sen}((\sqrt{x})^2)}{2\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{4x}.$$

Como F' é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ (quociente de funções diferenciáveis), F é duas vezes diferenciável e

$$F''(x) = \frac{4x\cos x - 4\operatorname{sen} x}{16x^2} = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{4x^2}.$$

□

(b) Determine um polinómio de 2º grau $p(x)$ tal que $p^{(k)}(\pi) = F^{(k)}(\pi)$, $k = 0, 1, 2$.

Resolução. (0.5 val.) Tomamos $p(x)$ dado pelo polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto π. Tendo em conta que, pela alínea anterior, $F(\pi) = 0$, $F'(\pi) = 0$ e $F''(\pi) = \frac{-\pi}{4\pi^2} = -\frac{1}{4\pi}$, temos

$$p(x) = F(\pi) + F'(\pi)(x-\pi) + \frac{F''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 = -\frac{1}{8\pi}(x-\pi)^2.$$

□

9. (2.0 val) Determine a natureza das séries seguintes e calcule a soma de uma delas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n! + 2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}.$$

Resolução. (i) (0,7 val) Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!+2^n}$ é uma série de termos não negativos podemos usar o critério da razão. Temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}(n! + 2^n)}{e^n((n+1)! + 2^{n+1})} &= e \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n! + 2^n}{(n+1)! + 2^{n+1}}\right) \\
&= e \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \frac{2^n}{n!}}{(n+1) + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}\right) n = e.0 = 0 < 1,
\end{aligned}$$

e concluímos que a série é absolutamente convergente.

(ii) (0,7 val) Como $1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ é uma sucessão crescente com primeiro termo igual a $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ e majorada por 1, temos que o termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$ verifica:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0,$$

tratando-se portanto de uma série de termos não negativos. Como $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (série de Dirichlet com $\alpha = 1/2$) é divergente, concluímos pelo critério da comparação que $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$ é uma série divergente.

(iii) (0,6 val) Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)^n,$$

e portanto é uma série geométrica de razão igual a $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, é convergente com soma igual a $\frac{a}{1-r}$, onde a designa o primeiro termo. Temos então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{-2}{9}}{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)} = -\frac{2}{15}.$$

□

10. (1.0 val.) Determine para que valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n^2}}(2x-3)^n.$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

Resolução. A série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n^2}}(2x-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n^2}}2^n\left(x-\frac{3}{2}\right)^n$$

será absolutamente convergente em $]\frac{3}{2}-R, \frac{3}{2}+R[$ e divergente em $\mathbb{R}\backslash[\frac{3}{2}-R, \frac{3}{2}+R]$ onde $R \in \overline{\mathbb{R}}$ (raio de convergência) é dado pelo limite seguinte:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{\sqrt[3]{1+n^2}}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{1+(n+1)^2}}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1+(n+1)^2}{1+n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Isto é, a série é absolutamente convergente em $]1,2[$ e divergente em $]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$. Temos agora que estudar o que se passa em $x=1$ e $x=2$. Em $x=2$ temos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+n^2}}$$

que é divergente visto ser da mesma natureza que a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, Em $x=1$ temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{1+n^2}},$$

(série alternada) que não é absolutamente convergente pelo que foi dito atrás mas é simplesmente convergente pelo critério de Leibnitz visto $\frac{1}{\sqrt[3]{1+n^2}}$ ser uma sucessão decrescente e convergente para zero.

□

11. (1.0 val.) Seja $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função cuja derivada é igual a $\frac{1}{x}$ e tal que $f(3)=1$. Desenvolva f em série de potências de $x-3$, indicando o maior intervalo aberto onde o referido desenvolvimento é válido.

Resolução. Comecemos por desenvolver $f'(x)=\frac{1}{x}$ em série de potências de $x-3$. Como

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3+x-3} = \frac{\frac{1}{3}}{1-(-\frac{(x-3)}{3})},$$

temos que, para $|\frac{x-3}{3}|<1$, isto é para $x\in]0,6[$, o seguinte desenvolvimento é válido:

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}.$$

Primitivando termo a termo obtemos então que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)} + C,$$

e da condição $f(3)=1$ sai então imediatamente que $C=1$. □

12. (1.5 val.) Seja f uma função positiva e decrescente em $[1,+\infty[$, e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx.$$

(a) Mostre que

$$A(n) = f(n) \;+\; \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(f(k) - f(x)\right)\,dx.$$

(b) Justifique que $A(n) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e que $A(n)$ é decrescente. Conclua, justificando, que $A(n)$ é uma sucessão convergente com $0 \leq \lim A(n) < f(1)$.

(c) Aproveite o resultado da alínea anterior para mostrar que

$$\lim\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n\right),$$

existe e pertence ao intervalo $[0,1[$.

Resolução. (i) (0,5 val)

Utilizando as propriedades do somatório e a aditividade do integral temos imediatamente que:

$$\begin{aligned} A(n) &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \\ &= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx\right) = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(f(k) - f(x)\right)\,dx, \end{aligned}$$

uma vez que $\int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k)\left((k+1) - k\right) = f(k)$.

(ii) (0,5 val) Como f é positiva e decrescente, temos que:

$$0 < f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k). \tag{1}$$

Desta desigualdade sai imediatamente que $\int_k^{k+1}\left(f(k) - f(x)\right)\,dx \geq 0$ e portanto

$$A(n) = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(f(k) - f(x)\right)\,dx \geq f(n) > 0.$$

Vamos agora mostrar que $A(n+1) - A(n) \leq 0$, ou seja, que $A(n)$ é uma sucessão decrescente. Temos que:

$$\begin{aligned} A(n+1) - A(n) &= \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x) - \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k)\right) - \left(\int_1^{n+1} f(x) - \int_1^n f(x)\right) \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq 0, \end{aligned}$$

por (1). A sucessão $A(n)$ é monótona (decrescente) e limitada (um majorante será $A(1) = f(1)$ e um minorante será zero como mostrámos). Logo, é uma sucessão convergente e pela relação entre limite e relação de ordem temos que $0 \leq \lim_{n\to\infty} A(n) < A(1) = f(1)$.

(iii) (0,5 val) Considerando o caso particular $f(x) = \frac{1}{x}$ (função positiva e decrescente em $[1, +\infty[$), temos por aplicação imediata do resultado na alínea anterior que existe

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\, dx) = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n),$$

e pertence ao intervalo $[0, f(1)[= [0, 1[$.

$\square$