Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat, MEAero

1º Sem. 2012/13 7/1/2013 Duração: 1h30m Versão B

---

1. (7.0 val.)

(a) Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$\text{(i)}\ 8x(1+x^2)^7\ , \qquad \text{(ii)}\ \frac{5x^2-2x-1}{(1+5x^2)(1+x)}\ , \qquad \text{(iii)}\ \frac{1}{\sqrt{x-3}}\operatorname{arcsen}\sqrt{x-3}.$$

(b) Calcule

$$\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{9}{4}} \frac{1}{\sqrt{x(3-x)}}\,dx.$$

Sugestão: considere a substituição $x = 3(\operatorname{sen}(t))^2$.

2. (1.5 val.) Determine a área da região $A \subset \mathbb{R}^2$ dada por:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2 \leq y \leq x\}.$$

3. (1.5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$. Considere a função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi(x) = \int_0^{x^3} x f(2t)\,dt.$$

Justifique que Φ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule Φ'.

4. (4.0 val) Determine a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n^2+3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{4^{n+1}}.$$

5. (5.0 val.)

(a) Determine para que valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x-3)^n.$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

(b) Denotando por f a função dada pela série acima no seu domínio de convergência absoluta, escreva f' como série de potências de $x-3$ e aproveite o desenvolvimento obtido para mostrar que $f'(x) = \dfrac{1}{5-x}$.

(c) Determine $f(2)$.

6. (1.0 val.) Seja $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ uma função que verifica:

$$\exists M > 0 : |f^{(n)}(x)| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que em todo o seu domínio f é dada pela sua série de Taylor no ponto zero.
Sugestão: use a fórmula de Taylor.