Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A

LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat

1º Sem. 2012/13 10/11/2012 Duração: 1h30m

---

1. (3,0 val.)

(i) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos cada um dos conjuntos seguintes:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq |x+1|\}, \qquad B = \{e^{-x},\ x \in \,]1/2, +\infty[\ \}.$$

(ii) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto:

$$C = \left\{ \log\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. (2.0 val.)
Recorrendo ao método de indução mostre que a derivada de ordem n da função xe^{2x} verifica:

$$(xe^{2x})^{(n)} = (2^n x + n2^{n-1})e^{2x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. (2.0 val) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\cosh(e^x)}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \arctan(x^{\frac{5}{2}}).$$

4. (4.0 val.) Calcule os seguintes limites (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\operatorname{sen}\sqrt{x})^2}{2x}, \qquad \lim_{x \to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\log x}}, \qquad \lim_{x \to 1^+} (x-1)\log(x^2-1).$$

5. (6.0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x) = |x|e^{-x(x+1)}.$$

(i) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

(ii) Estude f quanto a monotonia e extremos.

(iii) Indique, justificando, se f tem máximo e mínimo absolutos.

(iv) Justifique que f restringida ao intervalo $]1/2, +\infty[$ é invertível e indique o domínio da respectiva função inversa. Calcule a derivada da função inversa no ponto $f(1)$.

6. (3.0 val.)

(i) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que a imagem $f(\mathbb{R}) = \{b_1, \cdots, b_p\}$ é um conjunto finito. Prove que se f é contínua em $a \in \mathbb{R}$, então f é constante numa vizinhança de a.

(ii) Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 \arctan\left(1 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$. Prove que a função g' tem infinitos zeros em $]0, \frac{2}{3\pi}[$. Sugestão: utilize o teorema de Rolle em intervalos adequados.