Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A

LMAC, MEFT, MEBIom, MEQ, MEBiol, MEAmbi, LEAN, LEMat

1º Sem. 2012/13 10/11/2012 Duração: 1h30m

RESOLUÇÃO

---

1. (3,0 val.)

(i) (1,5 val.) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos cada um dos conjuntos seguintes:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq |x+1|\}, \qquad B = \{e^{-x},\ x \in]1/2, +\infty[\ \}.$$

Resolução. O conjunto A é o conjunto dos números reais cuja distância a 2 é maior ou igual do que a distância a -1. Tendo em conta que o ponto médio entre -1 e 2 é $1/2$, podemos concluir que

$$A =]-\infty, 1/2]\ .$$

Esta representação do conjunto A na forma de intervalo também pode ser obtida de forma puramente algébrica como se segue:

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq |x+1|\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x-2 \geq |x+1| \ \vee\ x-2 \leq -|x+1|\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \leq x-2 \ \vee\ |x+1| \leq 2-x\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : (x+1 \leq x-2 \ \wedge\ x+1 \geq -x+2) \vee (x+1 \leq 2-x \ \wedge\ x+1 \geq -2+x)\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : (1 \leq -2 \ \wedge\ 2x \geq 1) \vee (2x \leq 1 \ \wedge\ 1 \geq -2)\} \\
&= (\emptyset \cap [1/2, \infty[) \cup (]-\infty, 1/2] \cap \mathbb{R}) \\
&=]-\infty, 1/2]\ .
\end{aligned}$$

Relativamente ao conjunto B, e tendo em conta que a função e^{-x} é estritamente decrescente e $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, temos simplesmente que

$$B = \Big]0, e^{-1/2}\Big[\ .$$

$\square$

(ii) (1,5 val.) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto:

$$C = \left\{\log\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Resolução. Temos que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1+\frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq 2 \Rightarrow -\log(2) \leq \log\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \leq \log(2)\,,$$

onde se usou o facto de a função logaritmo ser crescente. Como $-\log(2), \log(2) \in C$, pois correspondem respectivamente a $n=2$ e $n=1$, podemos concluir que

$$\inf C = \min C = -\log(2) \quad \text{e} \quad \sup C = \max C = \log(2)\,.$$

$\square$

2. (2.0 val.)

Recorrendo ao método de indução mostre que a derivada de ordem n da função xe^{2x} verifica:

$$(xe^{2x})^{(n)} = (2^n x + n2^{n-1})e^{2x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Resolução. [$P(1)$].
$$(xe^{2x})' = e^{2x} + x(2e^{2x}) = (2^1 x + 1 \cdot 2^0)e^{2x}\,.$$

[$P(n) \Rightarrow P(n+1)$]. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.
$$(xe^{2x})^{(n)} = (2^n x + n2^{n-1})e^{2x} \quad \text{para um dado } n \in \mathbb{N},$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.
$$(xe^{2x})^{(n+1)} = (2^{n+1} x + (n+1)2^n)e^{2x} \quad \text{para o mesmo dado } n \in \mathbb{N}.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:
$$\begin{aligned}(xe^{2x})^{(n+1)} &= \Big((xe^{2x})^{(n)}\Big)' \overset{\text{hip}}{=} \big((2^n x + n2^{n-1})e^{2x}\big)' \\ &= 2^n e^{2x} + 2(2^n x + n2^{n-1})e^{2x} = (2^n + 2^{n+1}x + n2^n)e^{2x} \\ &= (2^{n+1}x + (n+1)2^n)e^{2x}\,.\end{aligned}$$

□

3. (2.0 val) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:
$$\frac{\cosh(e^x)}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \arctan(x^{\frac{5}{2}}).$$

Resolução.
$$\begin{aligned}\left(\frac{\cosh(e^x)}{\sqrt{x^2+1}}\right)' &= \frac{(\cosh(e^x))' \cdot \sqrt{x^2+1} - \cosh(e^x) \cdot (\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} \\ &= \frac{\operatorname{senh}(e^x) \cdot e^x \cdot \sqrt{x^2+1} - \cosh(e^x) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \quad (1{,}0 \text{ val.})\end{aligned}$$

$$\Big(\arctan(x^{\frac{5}{2}})\Big)' = \frac{1}{1+(x^{5/2})^2} \cdot (x^{5/2})' = \frac{1}{1+x^5} \cdot \frac{5}{2} \cdot x^{3/2} \quad (1{,}0 \text{ val.})$$

□

4. (4.0 val.) Calcule os seguintes limites (caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$):
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{sen}\sqrt{x})^2}{2x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\log x}}, \qquad \lim_{x\to 1^+} (x-1)\log(x^2-1).$$

Resolução.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{sen}\sqrt{x})^2}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \quad (1{,}5 \text{ val.})$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{\log x}} = (\cos 0)^{\frac{1}{-\infty}} = 1^0 = 1 \quad (1{,}0 \text{ val.})$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}(x-1)\log(x^2-1) &= \lim_{x\to1^+}(x-1)[\log(x-1)+\log(x+1)]\\ &= \lim_{x\to1^+}\frac{\log(x-1)}{\frac{1}{x-1}}+0\cdot\log 2=\frac{-\infty}{+\infty}+0\\ &\overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to1^+}-(x-1)=0 \quad \text{(1,5 val.)}\end{aligned}$$

□

5. (6.0 val.) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x)=|x|e^{-x(x+1)}.$$

(i) (1,5 val.) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

Resolução. Tendo em conta que a função módulo é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, temos que f também é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ com

$$f'(x)=e^{-x(x+1)}+x(-x^2-x)'e^{-x(x+1)}=(1-2x^2-x)e^{-x(x+1)} \text{ quando } x>0 \text{ e}$$

$$f'(x)=(-1+2x^2+x)e^{-x(x+1)} \text{ quando } x<0.$$

Aplicando o corolário do Teorema de Lagrange às expressões anteriores, temos que

$$f'_d(0)=\lim_{x\to0^+}f'(x)=1\cdot e^0=1 \quad \text{e} \quad f'_e(0)=\lim_{x\to0^-}f'(x)=-1\cdot e^0=-1$$

Como $f'_e(0)\neq f'_d(0)$, concluimos que f não é diferenciável no ponto zero. □

(ii) (1,5 val.) Estude f quanto a monotonia e extremos.

Resolução. Tendo em conta que

$$2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{1}{2},$$

a primeira derivada de f pode ser expressa na forma

$$f'(x)=-2(x+1)(x-1/2)e^{-x(x+1)},\ x>0,\ \text{e}\ f'(x)=2(x+1)(x-1/2)e^{-x(x+1)},\ x<0.$$

Temos então que $f'(x)>0$ para $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,1/2[$ e $f'(x)<0$ para $x\in\,]-1,0[\,\cup\,]1/2,+\infty[$, pelo que f é estritamente crescente em $]-\infty,-1[$ e em $]0,1/2[$ e estritamente decrescente em $]-1,0[$ e em $]1/2,+\infty[$. Assim, f tem máximos locais em $x=-1$ e $x=1/2$, e um mínimo local em $x=0$ (note-se que f é contínua em zero).

□

(iii) (1,0 val.) Indique, justificando, se f tem máximo e mínimo absolutos.

Resolução. Com a informação obtida na alínea anterior e tendo em conta que

$$f(-1)=e^0=1 \quad \text{e} \quad f(1/2)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{1}{2e^{3/4}}<1,$$

temos que f tem um máximo absoluto em $x=-1$.

Por outro lado, como $f(x)>0$ para todo o $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $f(0)=0$, temos que f tem um mínimo absoluto em $x=0$. □

(iv) (2,0 val.) Justifique que f restringida ao intervalo $]1/2,+\infty[$ é invertível e indique o domínio da respectiva função inversa. Calcule a derivada da função inversa no ponto $f(1)$.

Resolução. Como f é estritamente decrescente no intervalo $]1/2,+\infty[$, é invertível neste intervalo. Sendo além disso contínua, o Teorema do Valor Intermédio permite-nos concluir que

$$f(]1/2,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1/2)\right[\,.$$

Como $f(1/2) = \frac{1}{2e^{3/4}}$ e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} xe^{-x(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x(x+1)}} = \frac{+\infty}{+\infty}\\ &\overset{\mathrm{RC}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(2x+1)e^{x(x+1)}} = \frac{1}{+\infty} = 0\,,\end{aligned}$$

podemos concluir que o domínio da inversa f^{-1} é o intervalo $\left]0, \frac{1}{2e^{3/4}}\right[$.
Como f é diferenciável em $x = 1$ com $f'(1) = -2e^{-2}$, a derivada da função inversa no ponto $f(1)$ é dada por

$$(f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{e^2}{2}\,.$$

□

6. (3.0 val.)

(i) (1,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que a imagem $f(\mathbb{R}) = \{b_1, \ldots, b_p\}$ é um conjunto finito. Prove que se f é contínua em $a \in \mathbb{R}$, então f é constante numa vizinhança de a.

Resolução. Seja $f(a) = b_k \in \{b_1, \ldots, b_p\}$. Como f é contínua em $a \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_k \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b_k| < \varepsilon\,.$$

Escolhendo $\varepsilon = \min\{|b_j - b_k|\,,\ j = 1,\ldots,p\,,\ j \neq k\} > 0$ e considerando o $\delta > 0$ correspondente, temos que

$$\begin{aligned}|x-a| < \delta &\Rightarrow |f(x) - b_k| < \min\{|b_j - b_k|\,,\ j = 1,\ldots,p\,,\ j \neq k\}\\ &\Rightarrow f(x) \neq b_j\,,\ j = 1,\ldots,p\,,\ j \neq k\\ &\Rightarrow f(x) = b_k\,,\end{aligned}$$

i.e. f é constante igual a b_k na vizinhança $V_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta\} =]a-\delta, a+\delta[$.

□

(ii) (1,5 val.) Considere a função $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 \arctan(1 + \mathrm{sen}(1/x))$. Prove que a função g' tem infinitos zeros em $]0, \frac{2}{3\pi}[$. Sugestão: utilize o teorema de Rolle em intervalos adequados.

Resolução. Para provar a existência de zeros de g' usando o teorema de Rolle, devemos considerar intervalos cujos extremos coincidam com zeros de g. Estes ocorrem em $x = 0$ e quando o argumento da função arco tangente for igual a zero, i.e. quando

$$\mathrm{sen}(1/x) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{(4n+3)\pi}{2}\,,\ \forall n \in \mathbb{Z}\,.$$

Como estamos apenas interessados em zeros no intervalo $]0, \frac{2}{3\pi}[$, consideramos os infinitos zeros de g dados por $x_n = \frac{2}{(4n+3)\pi}$, com $n \in \mathbb{N}$. O teorema de Rolle garante então a existência de pelo menos um zero de g' em cada um dos intervalos $]x_{n+1}, x_n[\subset]0, \frac{2}{3\pi}[$, $n \in \mathbb{N}$. □