Instituto Superior Técnico
Departamento de Matematica

TESTES DE RECUPERAÇÃO DE CDI I

1º SEM. 2010/11 DURAÇÃO: 1H30/3H00 VERSÃO A

LEMAT, LEAN, MEBIOL, MEQ, MEAMBI E LMAC, MEBIOM, MEFT

RESOLUÇÃO

1. (1,5 val.)

(a) (0,9 val.) Represente na forma de um intervalo ou de uma união disjunta de intervalos os conjuntos seguintes:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |\arctan x| \leq 1\} \quad \text{e} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \log|x^2 - 4| - \log|x+2| > 1\right\}.$$

Resolução. Relativamente ao conjunto A, temos que:

$$|\arctan x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \arctan x \leq 1\,.$$

Aplicando a função tangente a cada um dos termos desta última desigualdade e usando o facto de ser uma função estritamente crescente em $]-\pi/2, \pi/2[\supset [-1, 1]$, obtemos

$$\tan(-1) \leq \tan(\arctan x) \leq \tan(1) \Leftrightarrow -\tan(1) \leq x \leq \tan(1) \Leftrightarrow x \in [-\tan(1), \tan(1)]\,.$$

Relativamente ao conjunto B, temos que:

$$\begin{aligned} B &= \left\{x \in \mathbb{R} : \log|x^2 - 4| - \log|x+2| > 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \log\left|\frac{x^2-4}{x+2}\right| > 1\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}\right| > e\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x-2| > e \wedge x \neq -2\} \\ &= (]-\infty, 2-e[\cup]2+e, +\infty[) \setminus \{-2\} \\ &=]-\infty, -2[\cup]-2, 2-e[\cup]2+e, +\infty[\end{aligned}$$

□

(b) (0,6 val.) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos seguintes:

$$C = \left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad D =]-1, 2] \quad \text{e} \quad C \cap D\,.$$

Resolução. $C = \{-1, 0, 1\}$ pelo que $\inf C = \min C = -1$ e $\sup C = \max C = 1$.

O conjunto D tem $\inf D = -1 \notin D$, pelo que não tem mínimo, e tem $\sup D = 2 \in D$, pelo que tem $\max D = 2$.

O conjunto $C \cap D = \{0, 1\}$ pelo que $\inf C \cap D = \min C \cap D = 0$ e $\sup C \cap D = \max C \cap D = 1$. □

2. (2,0 val.) Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x-\pi)}{3x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\log 2x)}{\log(x^3)}, \quad \lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan x}.$$

Resolução.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x-\pi)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cdot\operatorname{sen}(2x)}{3\cdot 2x} = -\frac{2}{3}\,. \quad \text{(0,5 val.)}$$

Sendo o seno uma função limitada entre -1 e 1, temos que

$$-\frac{1}{\log(x^3)} \leq \frac{\operatorname{sen}(\log 2x)}{\log(x^3)} \leq \frac{1}{\log(x^3)}\,, \ \forall x > 0\,.$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\log(x^3)} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log(x^3)}$$

podemos concluir pelo princípio do encaixe que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\log 2x)}{\log(x^3)} = 0\,. \quad \text{(0,5 val.)}$$

Tendo em conta que

$$(\tan x)^{\tan x} = e^{\log\left((\tan x)^{\tan x}\right)} = e^{(\tan x)\log(\tan x)}\,, \ \forall\, 0 < x < \pi/2\,,$$

temos que

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(\tan x)\log(\tan x)}\,.$$

Como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(\tan x)\log(\tan x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot(\log(\operatorname{sen} x) - \log(\cos x))\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\log(\operatorname{sen} x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(\operatorname{sen} x)}{1/x} = \frac{-\infty}{+\infty}\\ &\overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\operatorname{sen} x} = -0\cdot 1\cdot 1 = 0\,,\end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\tan x} = e^0 = 1\,. \quad \text{(1,0 val.)}$$

□

3. (1,5 val.) Calcule a derivada das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$a)\ e^{\cos(x^2)}\,; \qquad b)\ \frac{\arctan(\operatorname{senh}(x/2))}{\sqrt{x}}\,.$$

Resolução.

$$\left(e^{\cos(x^2)}\right)' = e^{\cos(x^2)}\cdot(\cos(x^2))' = e^{\cos(x^2)}\cdot(-\operatorname{sen}(x^2))\cdot 2x \quad \text{(0,7 val.)}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\arctan(\operatorname{senh}(x/2))}{\sqrt{x}}\right)'\\ &= \frac{(\arctan(\operatorname{senh}(x/2)))'\sqrt{x} - \arctan(\operatorname{senh}(x/2))\,(\sqrt{x})'}{x}\\ &= \frac{\frac{\cosh(x/2)\cdot 1/2}{1+\operatorname{senh}^2(x/2)}\cdot\sqrt{x} - \arctan(\operatorname{senh}(x/2))\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \qquad \text{(0,8 val.)}\end{aligned}$$

□

4. (1,0 val.) Se $0 \le a_i \le 1,\ i \ge 1$, mostre por indução que:

$$(1-a_1)\times\cdots\times(1-a_n) \ge 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Resolução. $[P(1)]$. Para $n = 1$ a desigualdade anterior fica

$$(1 - a_1) \geq 1 - \sum_{i=1}^{1} a_i = 1 - a_1$$

que é uma proposição verdadeira.
$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$. Assumindo como verdadeira a hipótese $P(n)$, i.e.

$$(1 - a_1) \times \cdots \times (1 - a_n) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{para um determinado } n \in \mathbb{N},$$

há que mostrar a validade da tese $P(n+1)$, i.e.

$$(1 - a_1) \times \cdots \times (1 - a_{n+1}) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n+1} a_i \quad \text{para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(1 - a_1) \times \cdots \times (1 - a_{n+1}) &= (1 - a_1) \times \cdots \times (1 - a_n) \times (1 - a_{n+1}) \\
&\geq \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot (1 - a_{n+1}) \\
&= 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - a_{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) a_{n+1} \\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{n+1} a_i
\end{aligned}$$

onde a hipótese e o facto de $a_{n+1} \leq 1$ são usados na primeira desigualdade e o facto de $0 \leq a_i,\ i \geq 1$, é usado na segunda desigualdade. □

5. (3,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}(1 - x^2) & \text{se } |x| < 1 \\ \log(2x^2 - c) & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

onde $c \in \left]-\infty, 2\right[$ designa uma constante.

(a) (0,5 val.) Determine o valor de c.

Resolução. Sendo f contínua em -1 e 1, temos necessariamente que

$$\lim_{x \to 1^-} \operatorname{arcsen}(1 - x^2) = \log(2 - c) \Rightarrow 0 = \log(2 - c) \Rightarrow 1 = 2 - c \Rightarrow c = 1\,.$$

□

(b) (1,0 val.) Mostre que f não é diferenciável em $x = 0$.

Resolução. Como a função arcsen é diferenciável no intervalo $\left]-1, 1\right[$, temos pelo Teorema da Derivada da Função Composta que f é diferenciável em $\left]-1, 1\right[\setminus \{0\}$ e

$$\begin{aligned}
f'(x) = \left(\operatorname{arcsen}(1 - x^2)\right)' &= \frac{-2x}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} \\
&= \frac{-2x}{|x|\sqrt{2 - x^2}}\,,\ \forall\, x \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\}\,.
\end{aligned}$$

Pelo corolário do Teorema de Lagrange, temos então que

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} = -\sqrt{2}$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2}\,.$$

Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$, podemos concluir que f não é diferenciável no ponto 0. $\square$

(c) (1,5 val.) Determine os intervalos de monotonia e os extremos de f.

Resolução. Pelo cálculo da derivada de f feito na alínea anterior, temos que

$$0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} < 0 \quad \text{e} \quad -1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} > 0\,.$$

Por outro lado

$$\big(\log(2x^2-1)\big)' = \frac{4x}{2x^2-1}$$

pelo que

$$x < -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \text{e} \quad 1 < x \Rightarrow f'(x) > 0\,.$$

Assim, f é estritamente decrescente em $]-\infty,-1[$ e $]0,-1[$ e estritamente crescente em $]-1,0[$ e $]1,+\infty[$. Sendo contínua em -1, 0 e 1, podemos concluir que f tem mínimos em -1 e 1 e máximo em 0. $\square$

6. (1,0 val.) Seja g uma função definida e diferenciável em $]0,1[$ e tal que:

$$g\left(\frac{1}{n+2}\right) = g\left(\frac{1}{n+1}\right) + 1.$$

(a) (0,5 val.) Justifique que g não pode ser prolongada por continuidade ao ponto 0.

Resolução. Se g fosse prolongável por continuidade ao ponto 0, então

$$g(0) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n+1}\right)\,.$$

Mas então

$$g\left(\frac{1}{n+2}\right) = g\left(\frac{1}{n+1}\right) + 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n+1}\right) + 1$$

$$\Rightarrow g(0) = g(0) + 1 \Rightarrow 0 = 1\,,$$

o que é absurdo. $\square$

(b) (0,5 val.) Mostre que existe uma sucessão c_n de termos em $]0,1[$ que verifica:

$$g'(c_n) = -(n+1)(n+2).$$

Resolução. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o Teorema de Lagrange garante que existe $c_n \in]\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1}[\subset]0,1[$ tal que

$$g'(c_n) = \frac{g(\frac{1}{n+1}) - g(\frac{1}{n+2})}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}} = \frac{-1}{\frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)}} = -(n+1)(n+2)\,.$$

$\square$

<u>O TESTE 1 ACABA AQUI.</u>

7. (2,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

(a) $e^x\sqrt{2-3e^x}$ (b) $x^2 \arctan x$ (c) $\dfrac{2x}{(x-1)(x^2+3)}$

Resolução.

(a) (0,5 val.) Trata-se de uma primitiva quase-imediata:

$$\int e^x\sqrt{2-3e^x} = -\frac{1}{3}\int -3e^x(2-3e^x)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\frac{(2-3e^x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{9}(2-3e^x)^{\frac{3}{2}}$$

(b) (1,0 val.) Usando primitivação por partes:

$$\begin{aligned}\int x^2\arctan(x) &= \frac{x^3}{3}\arctan(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{1+x^2}\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan(x) - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan(x) - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)\end{aligned}$$

(c) (1,0 val.) Decompomos a função racional:

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

Os coeficientes A, B e C são determinados por forma a que

$$A(x^2+3) + (Bx+C)(x-1) = 2x \Leftrightarrow (A+B)x^2 + (C-B)x + 3A - C = 2x\,,$$

o que significa resolver um sistema linear de 3 equações a 3 incógnitas:

$$A+B=0\,,\ C-B=2\,,\ 3A-C=0 \quad\Rightarrow\quad A=1/2\,,\ B=-1/2\,,\ C=3/2\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int\frac{2x}{(x-1)(x^2+3)} &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+3} + \frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2+3}\\ &= \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x^2+3| + \frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{1/\sqrt{3}}{1+(x/\sqrt{3})^2}\\ &= \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x^2+3| + \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan(x/\sqrt{3})\end{aligned}$$

□

8. (1,0 val.) Calcule

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

e aproveite o resultado para justificar que a área do círculo unitário é igual a π.
Sugestão: faça a mudança de variável $x = \operatorname{sen} t$. Poderá ser-lhe útil a fórmula $(\cos t)^2 = \frac{1+\cos(2t)}{2}$.

Resolução. Usando a mudança de variável indicada, temos que

$$x = \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \cos t\, dt \quad \text{e} \quad t\in[0,\pi/2] \Rightarrow x\in[0,1]\,.$$

Logo, usando também a relação trigonométrica indicada,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(0)\right] = \frac{\pi}{4}$$

Tendo em conta que

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{quando } x, y > 0,$$

temos que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ representa a área da parte do círculo unitário que está no primeiro quadrante, i.e. um quarto da área total do círculo unitário, pelo que esta é igual a π. $\square$

9. (2,0 val.) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\phi(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt\,.$$

a) (1,0 val.) Justifique que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e calcule ϕ'.

Resolução. ϕ é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ por ser a composta de duas funções de classe $C^\infty(\mathbb{R})$: o integral indefinido da exponencial de um polinómio e um polinómio. A sua derivada ϕ' pode ser calculada usando o Teorema da Derivada da Função Composta e o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\phi'(x) = e^{(x^3)^2}\cdot(x^3)' = e^{x^6}3x^2\,.$$

$\square$

b) (1,0 val.) Obtenha o desenvolvimento de ϕ em série de Taylor em torno de $x = 0$ indicando o respectivo intervalo de convergência.

Resolução. Usando a série de Taylor da função exponencial em torno de $x = 0$, i.e.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

temos que

$$\phi'(x) = 3x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^6)^n}{n!} = 3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{6n+2}}{n!}\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\,,$$
$$\Rightarrow\quad \phi(x) = c + 3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{6n+3}}{(6n+3)n!} = c + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{6n+3}}{(2n+1)n!}\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\,,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. Como

$$\phi(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt \Rightarrow \phi(0) = 0\,,$$

concluimos que $c = 0$ pelo que

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{6n+3}}{(2n+1)n!}\,,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\,.$$

$\square$

10. (2,0 val.)

(a) (1,3 val.) Determine a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{n-1}n^2} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+3n}\,.$$

Resolução. Para determinar a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{n-1}n^2}$, que é uma série de termos não-negativos, podemos usar o Critério da Razão:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3^{n+1}2^{n-1}n^2}{2^n(n+1)^2 3^n} = \frac{3}{2}\cdot \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1\,,$$

concluindo assim que a série é divergente.
Para determinar a natureza da segunda série, observamos que

$$\left|\frac{\arctan(n)}{n^2+3n}\right| < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}\,,$$

e $\sum 1/n^2$ é uma série convergente, podendo concluir por comparação que a série

$$\sum\left|\frac{\arctan(n)}{n^2+3n}\right| \text{ é convergente,}$$

pelo que a série

$$\sum \frac{\arctan(n)}{n^2+3n} \text{ é absolutamente convergente.}$$

□

(b) (0,7 val.) Justifique que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+n^2}$$

é convergente e que a sua soma é menor que 2.

Resolução. Tendo em conta que

$$\frac{1}{2^n+n^2} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}\,,$$

e como $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\left|R=\frac{1}{2}\right|<1$, logo convergente, podemos concluir por comparação que a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+n^2}$ também é convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+n^2} < \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\,.$$

□

11. (1,5 val) Determine para que valores de x a série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{3^n(\sqrt{n}+1)}$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

Resolução. O raio de convergência desta série de potências é dado por

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{3^{n+1}(\sqrt{n+1}+1)}{3^n(\sqrt{n}+1)} = 3 \cdot \lim \frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n}+1} = 3\,.$$

Assim, a série é absolutamente convergente quando

$$|2x+3| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x+3 < 3 \Leftrightarrow -6 < 2x < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 0 \Leftrightarrow x \in \,]-3, 0[$$

e divergente quando

$$|2x+3| > 3 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty, -3[\, \cup \,]0, +\infty[$$

Quando $x = -3$ a série de potências toma a forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n(\sqrt{n}+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$$

que é uma série numérica alternada com parte positiva decrescente e convergente para zero, logo convergente pelo Critério de Leibniz. A natureza da correspondente série de módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

pode ser determinada por comparação com a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$, que tendo expoente $1/2 < 1$ é divergente. De facto,

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}+1}} = \lim \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} = \lim 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$$

e como $0 < 1 < +\infty$ as séries têm a mesma natureza, pelo que a série dos módulos é divergente. Assim, quando $x = -3$ a série de potências é simplesmente convergente.

Quando $x = 0$ a série de potências toma a forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(\sqrt{n}+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

que já sabemos ser divergente. □

12. (1,0 val.) Seja f uma função estritamente crescente em $[1, +\infty[$.

(a) (0,5 val.) Mostre que

$$f(1) + \cdots + f(n-1) < \int_1^n f(x)\, dx < f(2) + \cdots + f(n), \ \forall\, n > 1\,.$$

Resolução. Considerando a partição $P_n = \{1, 2, \ldots, n-1, n\} \subset [1, n]$, $n > 1$, as correspondentes somas inferiores e superiores são dadas por

$$L(f, P_n) := \sum_{k=1}^{n-1} (\inf_{[k,k+1]} f) \cdot (k+1-k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = f(1) + \cdots + f(n-1)$$

e

$$U(f, P_n) := \sum_{k=1}^{n-1} (\sup_{[k,k+1]} f) \cdot (k+1-k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = f(2) + \cdots + f(n)\,,$$

onde

$$\inf_{[k,k+1]} f = f(k) \quad \text{e} \quad \sup_{[k,k+1]} f = f(k+1) \quad \text{porque } f \text{ é crescente.}$$

Assim, tendo em conta que a definição de integral e o facto de f ser estritamente crescente garantem que

$$L(f, P_n) < \int_1^n f(x)\,dx < U(f, P_n)\,,\ \forall\, n > 1\,,$$

fica mostrado o pretendido. $\square$

(b) (0,5 val.) Escolhendo $f = \log$ mostre que

$$(n-1)! < \frac{n^n}{e^{n-1}} < n!\ .$$

Resolução. Integrando por partes, obtemos

$$\int_1^n \log(x)\,dx = [x\log(x)]_1^n - \int_1^n 1\,dx = n\log(n) - (n-1)\,.$$

Usando a alínea (a) temos então que

$$\begin{aligned} & \log(1) + \cdots + \log(n-1) < \int_1^n < \log(2) + \cdots + \log(n) \\ \Rightarrow\quad & \log(1) + \cdots + \log(n-1) < \log(n^n) - (n-1) < \log(2) + \cdots + \log(n)\,. \end{aligned}$$

Aplicando a função exponencial a esta desigualdade obtemos

$$(n-1)! < \frac{n^n}{e^{n-1}} < n!\,,$$

como se queria mostrar. $\square$